

令和 8 年度 入学者選抜学力試験 数学 (前期) 解答例

[1] 解答例 :

(1) (i) $p \Rightarrow q$ (十分条件) : 条件 p より $0 < \alpha\beta$ 。従って, $\alpha\beta < 1$ の両辺を $\alpha\beta$ で割って, $\frac{1}{\alpha\beta} > 1$ が成り立つ。

(ii) $q \Rightarrow p$ (必要条件) : 条件 q より $0 < \alpha\beta$ 。従って, $\frac{1}{\alpha\beta} > 1$ の両辺に $\alpha\beta$ を掛けて, $\alpha\beta < 1$ 。よって, $0 < \alpha\beta < 1$, 即ち, 条件 p が成り立つ。

以上から, 適するのは ③。

(2) (i) $p \Rightarrow q$ (十分条件) : 反例を提示する。 $\alpha = -1, \beta = 1$ に対し, $\alpha\beta = -1$ であるから, 条件 p は成り立っている。他方, $\frac{1}{\alpha\beta} = -1 < 1$ であるから, このとき条件 q は成り立たない。

(ii) $q \Rightarrow p$ (必要条件) : 条件 q より $0 < \alpha\beta$ 。従って, $\frac{1}{\alpha\beta} > 1$ の両辺に $\alpha\beta$ を掛けて, $\alpha\beta < 1$, 即ち, 条件 p が成り立つ。

以上から, 適するのは ①。

(3) (i) $p \Rightarrow q$ (十分条件) : 反例を提示する。 $\alpha = 1, \beta = -1$ に対し, $\alpha\beta = -1$ であるから, 条件 p は成り立っている。他方, $\frac{1}{\beta} = -1$ であるから, $\frac{1}{\beta} < \alpha$ 。従って, 条件 q はこのとき成り立たない。

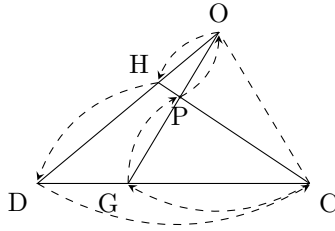
(ii) $q \Rightarrow p$ (必要条件) : 反例を提示する。 $\alpha = -2, \beta = -1$ に対し, $\frac{1}{\beta} = -1$ であるから, 条件 q は成り立っている。他方, $\alpha\beta = 2 > 1$ より, このとき条件 p は成り立たない。

以上から, 適するのは ④。

[2] 解答例：

(1) D は辺 AB の中点であるから、 $\triangle ABC$ の重心 G は線分 CD 上にある。他方、H は線分 OD 上にあるから、線分 CH と線分 OG は $\triangle ODC$ の内部の線分であることより、CH と OG は必ず交点 P をもつ。

また、 $0 < s < 1$ より H は線分 OD 上の端点を除いた点に位置し、G は $\triangle ABC$ の重心であるから、(必要なら下図を参照して) メネラウスの定理を $\triangle ODG$ と線分 HC に適用することにより、 $\frac{OH}{HD} \cdot \frac{DC}{CG} \cdot \frac{GP}{PO} = 1$ 、即ち、 $\frac{s}{1-s} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{GP}{PO} = 1$ が成り立つ。 $\therefore PG = \frac{2(1-s)}{3s} OP$



よって、 $OG = OP + PG = \left\{1 + \frac{2(1-s)}{3s}\right\} OP = \frac{2+s}{3s} OP$ 、即ち、 $OP = \frac{3s}{2+s} OG$ 。 $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OG}$ は同じ向きをもち、G は $\triangle ABC$ の重心であることより $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ が成り立つので、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3s}{2+s} \overrightarrow{OG} = \frac{3s}{2+s} \cdot \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{s}{2+s}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

(2) 線分 EG 上の点を Q_1 とおくと条件より、 $\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OE} + \alpha \overrightarrow{EG} = (1-\alpha)\overrightarrow{OE} + \alpha \overrightarrow{OG}$
 $= \frac{1-\alpha}{2}\vec{c} + \left(\frac{\alpha}{3}\vec{a} + \frac{\alpha}{3}\vec{b} + \frac{\alpha}{3}\vec{c}\right) = \frac{\alpha}{3}\vec{a} + \frac{\alpha}{3}\vec{b} + \frac{3-\alpha}{6}\vec{c}$ 、ただし、 $0 \leq \alpha \leq 1 \dots (i)$ と表される。

また、線分 FJ 上の点を Q_2 とおくと条件より、 $\overrightarrow{OQ_2} = \overrightarrow{OF} + \beta \overrightarrow{FJ} = (1-\beta)\overrightarrow{OF} + \beta \overrightarrow{OJ}$
 $= \frac{(1-\beta)\vec{b} + 2(1-\beta)\vec{c}}{3} + \beta \cdot t\vec{a} = t\beta\vec{a} + \frac{1-\beta}{3}\vec{b} + \frac{2(1-\beta)}{3}\vec{c}$ 、ただし、 $0 \leq \beta \leq 1 \dots (ii)$ と表される。

線分 FJ と線分 EG が交点をもつ、即ち、 $Q_1 = Q_2$ となる条件は、四点 O, A, B, C が同一平面上にないことより、(i), (ii) から

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{3} = t\beta \dots (iii) \\ \frac{\alpha}{3} = \frac{1-\beta}{3} \dots (iv) \\ \frac{3-\alpha}{6} = \frac{2(1-\beta)}{3} \dots (v) \\ 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1, 0 < t < 1 \dots (vi) \end{cases}$$

が成り立つことである。(iv), (v) より、 $\alpha = \frac{3}{5}$, $\beta = \frac{2}{5}$ 。従って、(iii) より、 $t = \frac{1}{2}$ 。これらは (vi) を満たすから、線分 FJ と線分 EG は交点 Q をもち、そのとき、 $t = \frac{1}{2}$ 。また、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$$

[3] 解答例：

(1) ゲームを 3 回行うとき、起こりうるすべての場合の数は $3^3 = 27$ 通り。このとき、勝者がすべて異なる場合の数は $3! = 6$ 通り。よって求める確率は、 $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$

(2) ゲームを 4 回行うとき、起こりうるすべての場合の数は $3^4 = 81$ 通り。このとき、1 人だけが 1 回も勝者にならない場合の数は、「1 人が 3 勝し、かつ、もう一人が 1 勝する」、または、「1 人が 2 勝し、かつ、もう一人が 2 勝する」場合のいずれかである。

前者の場合の数は、 ${}_3C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot ({}_4C_3 \cdot {}_1C_1) = 24$ 通り。ただし、 ${}_3C_2$ は勝利者の組の選び方、 ${}_2C_1$ はその各々に対して 3 勝する方の選び方、 ${}_4C_3 \cdot {}_1C_1$ は以上を受けその各々に対して 3 勝と 1 勝の並び方の場合の数 (同じものを含む順列)。後者の場合の数は同様に、 ${}_3C_2 \cdot ({}_4C_2 \cdot {}_2C_2) = 18$ 通り。以上から、求める確率は、 $\frac{24+18}{81} = \frac{14}{27}$

(3) ゲームを 5 回行うとき、起こりうるすべての場合の数は $3^5 = 243$ 通り。以下、5 回のゲームのうち A が勝者になる回数 (確率変数) を X 、 $X = k$ となる確率を $P(X = k)$ とおく。 $0 \leq X \leq 5$ である。

・ $X = 0$ の場合：すべての回で B か C が勝つ場合の数は、 $2^5 = 32$ 通り。 $\therefore P(X = 0) = \frac{32}{243}$

・ $X = 1$ の場合：5 回のうち、1 回 A が勝ち、残り 4 回は B か C が勝つ場合の数は、 ${}_5C_1 \cdot 2^4 = 80$ 通り。 $\therefore P(X = 1) = \frac{80}{243}$

・ $X = 2$ の場合：5 回のうち、2 回 A が勝ち、残り 3 回は B か C が勝つ場合の数は ${}_5C_2 \cdot 2^3 = 80$ 通り。 $\therefore P(X = 2) = \frac{80}{243}$

・ $X = 3$ の場合：5 回のうち、3 回 A が勝ち、残り 2 回は B か C が勝つ場合の数は ${}_5C_3 \cdot 2^2 = 40$ 通り。 $\therefore P(X = 3) = \frac{40}{243}$

・ $X = 4$ の場合：5 回のうち、4 回 A が勝ち、残り 1 回は B か C が勝つ場合の数は ${}_5C_4 \cdot 2 = 10$ 通り。 $\therefore P(X = 4) = \frac{10}{243}$

・ $X = 5$ の場合：5 回のうち、5 回 A が勝つ場合は ${}_5C_5 = 1$ 通り。 $\therefore P(X = 5) = \frac{1}{243}$

以上から、求める期待値は、 $0 \times \frac{32}{243} + 1 \times \frac{80}{243} + 2 \times \frac{80}{243} + 3 \times \frac{40}{243} + 4 \times \frac{10}{243} + 5 \times \frac{1}{243} = \frac{5}{3}$

(4) ゲームを 5 回行うとき、 $Y = k$ となる確率を $P(Y = k)$ とおく。勝者が必ず 1 人に決まることより、 $Y = 0, Y = 1$ のケースは起こらない。従って、 $2 \leq Y \leq 5$ である。

・ $Y = 2$: 3 人の内 2 人がそれぞれ 2 勝する場合に当たる。その場合の数は ${}_3C_2 \cdot {}_5C_1 \cdot ({}_4C_2 \cdot {}_2C_2) = 90$ 通り。ただし、 ${}_3C_2$ は 3 人のうち 2 勝する 2 人の選び方の場合の数。 $\therefore P(Y = 2) = \frac{90}{243}$

・ $Y = 3$: 3 人の内 1 人が 3 勝する場合に当たる。その場合の数は同様に、 ${}_3C_1 \cdot {}_5C_3 \cdot 2^2 = 120$ 通り。 $\therefore P(Y = 3) = \frac{120}{243}$

・ $Y = 4$: 3 人の内 1 人が 4 勝する場合に当たる。その場合の数は同様に、 ${}_3C_1 \cdot {}_5C_4 \cdot 2 = 30$ 通り。 $\therefore P(Y = 4) = \frac{30}{243}$

・ $Y = 5$: 3 人の内 1 人が 5 勝する場合に当たる。その場合の数は同様に、 ${}_3C_1 \cdot {}_5C_5 = 3$ 通り。 $\therefore P(Y = 5) = \frac{3}{243}$

以上から、求める期待値は、 $2 \times \frac{90}{243} + 3 \times \frac{120}{243} + 4 \times \frac{30}{243} + 5 \times \frac{3}{243} = \frac{25}{9}$

[4] 解答例：

(1) 7 枚のカードから 2 枚のカードを取り出す取り出し方は ${}_7C_2 = 21$ 通り。また, $2 \leq X \leq 6$ である。

・ $X = 2$ の場合：1 と書かれたカードを 2 枚取り出す取り出し方。 ${}_2C_2 = 1$ 通り。

・ $X = 3$ の場合：1 と書かれたカードと 2 と書かれたカードをそれぞれ 1 枚取り出す取り出し方。
 ${}_2C_1 \times {}_2C_1 = 4$ 通り。

・ $X = 4$ の場合：1 と書かれたカードと 3 と書かれたカードそれぞれ 1 枚取り出す取り出し方。 ${}_2C_1 \times {}_3C_1 = 6$ 通り。または, 2 と書かれたカードを 2 枚取り出す取り出し方。 ${}_2C_2 = 1$ 通り。以上から, 計 7 通り。

・ $X = 5$ の場合：2 と書かれたカードと 3 と書かれたカードそれぞれ 1 枚取り出す取り出し方。 ${}_2C_1 \times {}_3C_1 = 6$ 通り。

・ $X = 6$ の場合：3 と書かれたカードを 2 枚取り出す取り出し方。 ${}_3C_2 = 3$ 通り。以上から, 求める期待値を $E(X)$ とおくと,

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{21} + 3 \cdot \frac{4}{21} + 4 \cdot \frac{7}{21} + 5 \cdot \frac{6}{21} + 6 \cdot \frac{3}{21} = \frac{30}{7}$$

(2) 1 回の試行で $X \geq 5$ となる確率は $\frac{6+3}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$ 。よって, Y は二項分布 $B\left(7, \frac{3}{7}\right)$ に従う。以上から, 求める期待値と分散をそれぞれ $E(Y)$, $V(Y)$ とおくと,

$$E(Y) = 7 \cdot \frac{3}{7} = 3, V(Y) = 7 \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(1 - \frac{3}{7}\right) = \frac{12}{7}$$

(3) W は二項分布 $B\left(300, \frac{3}{7}\right)$ に従うから, W の平均, 分散, 標準偏差をそれぞれ $E(W)$, $V(W)$, $\sigma(W)$ とおくと,

$$E(W) = 300 \cdot \frac{3}{7} = \frac{900}{7}, V(W) = 300 \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(1 - \frac{3}{7}\right) = \frac{3600}{49}, \sigma(W) = \frac{60}{7}$$

従って, W は近似的に正規分布 $\mathcal{N}\left(\frac{900}{7}, \left(\frac{60}{7}\right)^2\right)$ に従うとしてよい。 W を標準化して $Z = \frac{W - \frac{900}{7}}{\frac{60}{7}}$ と

おくと, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 。また, $W \leq 120 \iff Z \leq \frac{120 - \frac{900}{7}}{\frac{60}{7}} = -1$

$\therefore P(W \leq 120) = P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$ 。以上から, W が 120 以下となる確率の正規分布による近似値は 0.1587 である。なお, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ は付表の正規分布表による。

[5] 解答例 :

$$(1) f'(x) = 2x - 2 \cdots (i)$$

(i) より, $f'(0) = -2$ 。また, $f(0) = -1$ 。以上から, 求める ℓ の方程式は $y = -2(x - 0) + f(0)$, 即ち,
 $y = -2x - 1$

同様に, (i) より, $f'(3) = 4$ 。また, $f(3) = 2$ 。以上から, 求める m の方程式は $y = 4(x - 3) + f(3)$, 即ち,
 $y = 4x - 10$

$$(2) g'(x) = \frac{2}{3}x + a \cdots (ii)$$

ℓ と $y = g(x)$ の接点を $P(p, g(p))$ とおくと, P における接線の方程式は (ii) より,

$$y = \left(\frac{2}{3}p + a\right)(x - p) + g(p) \iff y = \left(\frac{2}{3}p + a\right)x - \frac{1}{3}p^2 + b$$

これが ℓ と一致するのだから, 係数を比較して,
$$\begin{cases} \frac{2}{3}p + a = -2 \\ -\frac{1}{3}p^2 + b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = -\frac{3}{2}(a + 2) \\ -\frac{1}{3}p^2 + b = -1 \end{cases}$$

以上から p を消去して, $-\frac{3}{4}(a + 2)^2 + b = -1 \cdots (iii)$

また, m と $y = g(x)$ の接点を $Q(q, g(q))$ とおくと, Q における接線の方程式は ℓ の場合と同様にして,
 $y = \left(\frac{2}{3}q + a\right)x - \frac{1}{3}q^2 + b$

これが m と一致するのだから, 係数を比較して,
$$\begin{cases} \frac{2}{3}q + a = 4 \\ -\frac{1}{3}q^2 + b = -10 \end{cases} \iff \begin{cases} q = \frac{3}{2}(4 - a) \\ -\frac{1}{3}q^2 + b = -10 \end{cases}$$

以上から q を消去して, $-\frac{3}{4}(4 - a)^2 + b = -10 \cdots (iv)$

(iii), (iv) から b を消去して整理すると, $a = 0$, これを (iii) または (iv) に代入して $b = 2$

(3) (2) より, $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2$ である。 $f(x) - g(x) = \frac{2}{3}x^2 - 2x - 3$ について, $\frac{2}{3}x^2 - 2x - 3 = 0$ の解は
 $x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}}{2}$ 。これらの解を α, β , ただし $\alpha < \beta$ とおき, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とおくと,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx = \int_{\alpha}^{\beta} \{g(x) - f(x)\} dx = -\frac{2}{3} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \beta)(x - \alpha) dx \\ &= -\frac{2}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \{(x - \alpha + \alpha - \beta)(x - \alpha)\} dx = -\frac{2}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \{(x - \alpha)^2 + (\alpha - \beta)(x - \alpha)\} dx \\ &= -\frac{2}{3} \left\{ \left[\frac{(x - \alpha)^3}{3} \right]_{\alpha}^{\beta} - (\beta - \alpha) \left[\frac{(x - \alpha)^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} \right\} = -\frac{2}{3} \left\{ \frac{(\beta - \alpha)^3}{3} - \frac{(\beta - \alpha)^3}{2} \right\} \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \left\{ -\frac{(\beta - \alpha)^3}{6} \right\} = \frac{(\beta - \alpha)^3}{9} \end{aligned}$$

$$\beta - \alpha = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2} - \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ であるから代入して, } S = 9\sqrt{3}$$

[6] 解答例：

$$(1) f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$-1 < x < 1$ において常に $\sqrt{1-x^2} > 0$ が成り立つ。従って、 $f'(x) = 0$ の解は $1-2x^2 = 0$ を解いて、 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。また、 $f'(x) > 0$ の解は $1-2x^2 > 0$ を解いて、 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。 $f'(x) < 0$ の解は $1-2x^2 < 0$ を解いて、 $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ または、 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

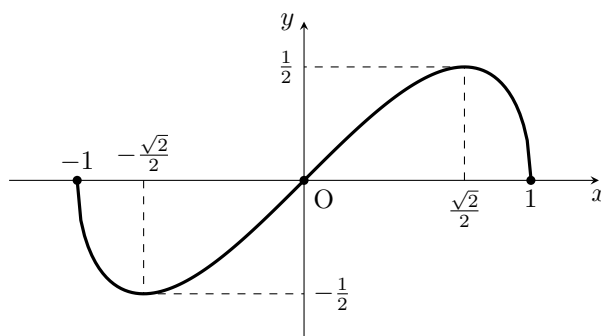
以上から、 $y = f(x)$ の増減表は

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
f'	$/$	$-$	0	$+$	0	$-$	$/$
f	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

$$\text{極小値：} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \text{ 極大値：} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

増減表より、 $y = f(x)$ の増減、極値は以上の通りである。

(2) $O(0, f(0)) = O(0, 0)$ と (1) の増減表より、 $y = f(x)$ のグラフの概形は下図。



$y = f(x)$ は奇関数であるから、上記のグラフは原点对称。従って、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を S とおくと、

$$S = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\left(-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \cdot (-2x) = f(x) \text{ であるから,}$$

$$S = 2 \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

(3) (2) で指摘したように、 $y = f(x)$ は奇関数であり、そのグラフは原点对称であるから、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とおくと、

$$V = 2 \int_0^1 \pi \{f(x)\}^2 dx = 2\pi \int_0^1 x^2(1-x^2) dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{15}$$