

〔1〕

(1) 正五角形の内角であるから, $\angle ABC = \frac{3\pi}{5}$

$$\begin{aligned}\angle BCA &= \angle BAC = \frac{\pi - \frac{3\pi}{5}}{2} = \frac{\pi}{5}, \quad \angle BCD = \\ \angle ABC = \frac{3\pi}{5} \text{ より, } \angle ACD &= \angle BCD - \angle BCA = \frac{2\pi}{5}\end{aligned}$$

(2) $\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$

$$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta = \\ (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \cdot \sin \theta &= \\ = (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta\end{aligned}$$

(3) $\theta = \angle ACD = \frac{2\pi}{5}$ とおくと, $3\theta + 2\theta = 2\pi$ であるから, $\cos 3\theta = \cos 2\theta$

$$\begin{aligned}\cos \theta = t \text{ とおくと, (2) より, } 4t^3 - 3t &= 2t^2 - 1 \Leftrightarrow \\ (t - 1)(4t^2 + 2t - 1) &= 0\end{aligned}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ であるから } 0 < t < 1 \quad \text{よって}$$

$$\cos \angle ACD = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

(4) A から直線 CD に下した垂線を AH とする。H は CD の中点であるから, $CH = \frac{1}{2}$

$$(3) \text{ より, } CH = AC \cos \angle ACD = AC \times \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって, } AC = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

[2]

- (1) $\frac{a_{n+1}^2}{S_n S_{n+1}} = 2$, $S_1 = a_1 = 1$, $S_2 = a_1 + a_2 = 1 + a_2$ なので,

$$\frac{a_2^2}{1 \times (1 + a_2)} = 2$$

である。上式を整理すると $a_2^2 - 2a_2 - 2 = 0$ が得られる。この方程式の解は $a_2 = 1 \pm \sqrt{3}$ となるが $a_n > 0$ であることから

$$a_2 = 1 + \sqrt{3}$$

となる。これより, $S_2 = 2 + \sqrt{3}$ である。

(2)

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+1}}{S_n} + \frac{S_n}{S_{n+1}} - 2 &= \frac{S_{n+1}^2 + S_n^2 - 2S_n S_{n+1}}{S_n S_{n+1}} \\ &= \frac{(S_{n+1} - S_n)^2}{S_n S_{n+1}} \\ &= \frac{a_{n+1}^2}{S_n S_{n+1}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。

- (3) (2) より, $T_n^2 - 4T_n + 1 = 0$ を満たす。この2次方程式を解くと

$$T_n = 2 \pm \sqrt{3}$$

ここで, $T_n = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{S_n + a_{n+1}}{S_n} = 1 + \frac{a_{n+1}}{S_n}$ であり, 数列 $\{a_n\}$ の各項が正であることを踏まえると, $T_n > 1$ である。したがって, $T_n = 2 + \sqrt{3}$ である。

これより

$$S_{n+1} = (2 + \sqrt{3})S_n$$

が成り立つので, S_n は公比が $2 + \sqrt{3}$ の等比数列であり, $n \geq 1$ のとき

$$S_{n+1} = (2 + \sqrt{3})^n S_1 = (2 + \sqrt{3})^n a_1 = (2 + \sqrt{3})^n$$

である。 $S_1 = 1$ なので, $n \geq 1$ のとき, $S_n = (2 + \sqrt{3})^{n-1}$ である。

- (4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (2 + \sqrt{3})^{n-1} - (2 + \sqrt{3})^{n-2} \\ &= (1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{n-2}, \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき, $a_1 = 1$ である。

まとめると, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ (1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{n-2} & (n \geq 2) \end{cases}$$

である。

[3]

- (1) 初めに取り出される3個の玉に1個も0と書かれた玉が入っていない確率は

$$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$$

したがって、初めに取り出される3個の玉に少なくとも1個0と書かれた玉が入っている確率は

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$X = 0$ となる事象と、初めに取り出される3個の玉に少なくとも1個0と書かれた玉が入っている事象は同じ事象なので、求める確率は $\frac{5}{6}$ である。

- (2) X が取り得る値は0, 1, 2, 4, 8である。

$X = 0$ となる確率 $P(X = 0)$ は(1)で求めた。

$X = 1$ となる事象は、初めに取り出される3個の玉がいずれも1と書かれた玉となる事象なので、 $X = 1$ となる確率 $P(X = 1)$ は、

$$P(X = 1) = \frac{3 \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{120}$$

である。

$X = 2$ となる事象は、初めに取り出される3個の玉のうち、1個が2, 2個が1と書かれた玉となる事象と同じなので、 $X = 2$ となる確率 $P(X = 2)$ は、

$$P(X = 2) = 3 \times \frac{3 \times 3 \times 2}{10 \times 9 \times 8} = \frac{3}{40}$$

である。

$X = 4$ となる事象は、初めに取り出される3個の玉のうち、1個が1, 2個が2と書かれた玉となる事象と同じなので、 $X = 4$ となる確率 $P(X = 4)$ は、

$$P(X = 4) = 3 \times \frac{3 \times 3 \times 2}{10 \times 9 \times 8} = \frac{3}{40}$$

である。

$X = 8$ となる事象は、初めに取り出される3個の玉がいずれも2と書かれた玉となる事象と同じなので、 $X = 8$ となる確率 $P(X = 8)$ は、

$$P(X = 8) = \frac{3 \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{120}$$

である。

以上より X の期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) \\ &\quad + 4 \times P(X = 4) + 8 \times P(X = 8) \\ &= 1 \times \frac{1}{120} + 2 \times \frac{3}{40} + 4 \times \frac{3}{40} + 8 \times \frac{1}{120} \\ &= \frac{1 + 18 + 36 + 8}{120} = \frac{63}{120} \\ &= \frac{21}{40} \end{aligned}$$

- (3) Bさんが勝つのは、 $X = 0$ かつ $Y \geq 1$ となる事象が起きるか、 $X = 1$ かつ $Y = 2$ となる事象が起きるか、のいずれかである。前者の事象をS, 後者の事象をTとおく。

事象Sが起きる場合、初めに取り出される3個の玉の中に含まれる0と書かれた玉の個数は3個か、2個か、1個かのいずれかである。

事象Sのうち、初めに取り出される3個の玉のうち0と書かれた玉の個数が3個で、4個目に取り出される玉に書かれた数字が1以上である確率は

$$\frac{4 \times 3 \times 2}{10 \times 9 \times 8} \times \frac{6}{7} = \frac{1}{35}$$

である。

事象Sのうち、初めに取り出される3個の玉のうち0と書かれた玉の個数が2個で、4個目に取り出される玉に書かれた数字が1以上である確率は

$$3 \times \frac{4 \times 3 \times 6}{10 \times 9 \times 8} \times \frac{5}{7} = \frac{3}{14}$$

である。

事象Sのうち、初めに取り出される3個の玉のうち0と書かれた玉の個数が1個で、4個目に取り出される玉に書かれた数字が1以上である確率は

$$3 \times \frac{4 \times 6 \times 5}{10 \times 9 \times 8} \times \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$$

である。

事象Tは、初めに取り出される3個の玉がいずれも1で、4個目に取り出される玉が2である事象である。したがってこの事象が発生する確率は

$$\frac{3 \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times 8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{280}$$

である。

以上より、求める確率は上述の4つの確率の和となるので、

$$\frac{1}{35} + \frac{3}{14} + \frac{2}{7} + \frac{1}{280} = \frac{8 + 60 + 80 + 1}{280} = \frac{149}{280}$$

である。

[4]

- (1) H_1 と判断できるかどうかを仮説検定で判断するために,

H_0 : 組で1位のチームと2位のチームの, T1での強さは同等である

という仮説を立てる。この仮説 H_0 のもとで, 組で1位の8チームのうち7チーム以上が勝利する確率は

$${}_8C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + {}_8C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1+8}{256} \doteq 0.035$$

である。これは有意水準の 0.01 より大きいから, 仮説 H_0 は棄却できない。従って, 仮説 H_1 が正しいとは主張できない。

- (2) 仮説 H_0 の下で, 組で1位のチームのうち勝利するチームの数 X は, 二項分布 $B(56, 0.5)$ に従う。 X の期待値と分散は

$$E(X) = 56 \times 0.5 = 28$$

$$V(X) = 56 \times 0.5 \times 0.5 = 14$$

であるから, $Z = \frac{X - 28}{\sqrt{14}} = \frac{X - 28}{3.74}$ は近似的に標準正規分布に従う。正規分布表より, $P(Z \leq 2.33) \doteq 0.99$ であるから, 有意水準 1% の棄却域は $Z \geq 2.33$ である。 $X = 44$ のとき, $Z = \frac{44 - 28}{3.74} \doteq 4.28$ であり, この値は棄却域に入るから, 仮説 H_0 を棄却できる。従って, 仮説 H_1 が正しいと主張できる。

[5]

$$f(x) = x|x| - x + 2$$

$$= \begin{cases} x^2 - x + 2 & : x \geq 0 \cdots (i) \\ -x^2 - x + 2 & : x \leq 0 \cdots (ii) \end{cases}$$

(1) C の接線における接点の x 座標を s とおく。

① $s \geq 0$ のとき, (i) から, $f'(x) = 2x - 1$ であるから, $2s - 1 = 1$ より, $s = 1$ 。従って, 求める接線は (i) より,

$y = (x - 1) + 2 = x + 1$, 即ち, $y = x + 1 \cdots (iii)$

$x \geq 0$ のとき, $x^2 - x + 2 = x + 1 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x = 1$ 。また, $x \leq 0$ のとき, $-x^2 - x + 2 = x + 1 \iff x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$ より, $x = -1 - \sqrt{2}$

よって, 求める共有点は $(1, 2)$, $(-1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$

② $s \leq 0$ のとき, (ii) から, $f'(x) = -2x - 1$ であるから, $-2s - 1 = 1$ より, $s = -1$ 。従って, 求める接線は (ii) より,

$y = (x + 1) + 2 = x + 3$, 即ち, $y = x + 3 \cdots (iv)$

$x \leq 0$ のとき, $-x^2 - x + 2 = x + 3 \iff (x + 1)^2 = 0 \iff x = -1$ 。また, $x \geq 0$ のとき, $x^2 - x + 2 = x + 3 \iff x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{2}$ より, $x = 1 + \sqrt{2}$

よって, 求める共有点は $(-1, 2)$, $(1 + \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$

(2) (1) ①より, $\ell : x - y + 1 = 0$, $P = (-1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $Q = (1, 2)$, $-1 - \sqrt{2} \leq t \leq 1$ としてよい。(従って $\triangle PQR$ は t に対し一意的に定まる)

R と直線 PQ の距離を d とおくと, $S = \frac{1}{2} d \cdot \overline{PQ} \cdots (v)$ 。
 $\overline{PQ} = \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2 + (2 + \sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 2(1 + \sqrt{2}) \cdots (vi)$

① $-1 - \sqrt{2} \leq t \leq 0$ のとき: $R = (t, -t^2 - t + 2)$ であるから, $d = \frac{|t - (-t^2 - t + 2) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|t^2 + 2t - 1|}{\sqrt{2}}$ 。
 $g(t) = t^2 + 2t - 1$ とおくと, $g' = 2t + 2$ から,

t	$-1 - \sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
g'	$-2\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	2
g	0	$\searrow$	最小	$\nearrow$	-1

従って, (v), (vi) より, $S = \frac{(1 + \sqrt{2})(1 - t^2 - 2t)}{\sqrt{2}}$

② $0 \leq t \leq 1$ のとき: $R = (t, t^2 - t + 2)$ であるから, $d = \frac{|t - (t^2 - t + 2) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{(t - 1)^2}{\sqrt{2}}$ 。 $g(t) = (t - 1)^2$ とおくと, $g' = 2t - 2$ から,

t	0	$\cdots$	1
g'	-2	$-$	0
g	最大	$\searrow$	0

従って, (v), (vi) より, $S = \frac{(1 + \sqrt{2})(t - 1)^2}{\sqrt{2}}$

$$\text{以上まとめて, } S = \begin{cases} \frac{(1 + \sqrt{2})(1 - t^2 - 2t)}{\sqrt{2}} & : -1 - \sqrt{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{(1 + \sqrt{2})(t - 1)^2}{\sqrt{2}} & : 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(3) $S = S(t)$ とおく。(2) から, $-1 - \sqrt{2} \leq t \leq 0$ のとき, S の最大値は $S(-1) = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$ 。 $0 \leq t \leq 1$ のとき, S の最大値は $S(0) = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ 。

$S(-1) > S(0)$ であるから, 求める三角形の面積の最大値は, $2 + \sqrt{2}$ ($t = -1$)

[6]

(1) 部分積分によって,

$$\begin{aligned}
C_k &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^k \cos x \, dx \\
&= [x^k \sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} kx^{k-1} \sin x \, dx \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^k + \left(-\frac{\pi}{2}\right)^k - kS_{k-1}
\end{aligned}$$

となる。

(2) 同様に,

$$\begin{aligned}
S_k &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^k \sin x \, dx \\
&= [-x^k \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} kx^{k-1} \cos x \, dx \\
&= kC_{k-1}
\end{aligned}$$

となる。

(3) 上の関係を繰り返すと,

$$C_k = \left(\frac{\pi}{2}\right)^k + \left(-\frac{\pi}{2}\right)^k - k(k-1)C_{k-2}$$

がわかる。特に, k が奇数のとき,

$$C_k = -k(k-1)C_{k-2}$$

である。これを使うと

$$C_k = (-1)^{(k-1)/2} k! C_1$$

となる。ここで,

$$C_1 = -S_0 = 0$$

なので, k が奇数ならば $C_k = 0$ となる。

(4) 上の関係を使えば,

$$C_2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2C_0$$

である。ここで,

$$\begin{aligned}
C_0 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\
&= [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

だから,

$$C_2 = \frac{\pi^2}{2} - 4$$

である。