

[1]

- (1) n が自然数のとき, $2n-1, 2n+1, 2n+3$ のいずれかひとつが 3 の倍数であることを示せばよい。 k を自然数として,

$$n = 3k \text{ のとき, } 2n+3 = 3(2k+1)$$

$$n = 3k-1 \text{ のとき, } 2n-1 = 3(2k-1)$$

$$n = 3k-2 \text{ のとき, } 2n+1 = 3(2k-1)$$

であるから, $2n-1, 2n+1, 2n+3$ のいずれかひとつが 3 の倍数である。よって S_n は 3 の倍数である。

- (2) $n = 1$ のとき, $S_1 = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$, 一方 $1 \cdot (1+2) \cdot (2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1) = 15$ であるから正しいことがわかる。

$n = k$ のとき正しいと仮定する。すなわち $S_k = k(k+2)(2k^2+4k-1)$ であるとする,

$$S_{k+1} = k(k+2)(2k^2+4k-1) + \{2(k+1)-1\}\{2(k+1)+1\}\{2(k+1)+3\}$$

$$= k(k+2)(2k^2+4k-1) + (2k+1)(2k+3)(2k+5)$$

$$= 2k^4 + 16k^3 + 43k^2 + 44k + 15$$

$$= (k+1)(2k^3 + 14k^2 + 29k + 15)$$

$$= (k+1)(k+3)(2k^2+8k+5)$$

$$= (k+1)(k+3)\{2(k+1)^2+4(k+1)-1\}$$

となって $n = k+1$ のときも正しいことがわかる。

よって数学的帰納法より, すべての自然数 n に対して成り立つことがわかった。

- (3) 命題は「真」である。なぜなら, $S_n = n(n+2)(2n^2+4n-1)$ において $2n^2+4n-1$ は奇数であるから, S_n が偶数となるためには $n(n+2)$ が偶数であることが必要十分である。 S_n が偶数ならば $n(n+2)$ は偶数であるが, n と $n+2$ は奇偶を共にするので, $n, n+2$ ともに偶数となる。 n は偶数なので m を自然数として $n = 2m$ と書いて, $n(n+2) = 2m(2m+2) = 4m(m+1)$ となり, これは 4 の倍数である。 m と $m+1$ のどちらかは偶数であるから, $4m(m+1) = n(n+2)$ は 8 の倍数である。したがって, $S_n = n(n+2)(2n^2+4n-1)$ は 8 の倍数である。

また, (1) より S_n は 3 の倍数である。3 と 8 の最小公倍数は 24 なので, S_n は 24 の倍数である。

[2]

(1) $\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いて, $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 = 0.6990$ と計算できる。

(2) まず, 9^{30} の桁数を求める。 $\log_{10} 9^{30} = 30 \log_{10} 3^2 = 60 \log_{10} 3$ なので, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて, $\log_{10} 9^{30} = 28.626$ を得る。したがって,

$$28 \leq \log_{10} 9^{30} = 28.626 < 29$$

である。このことから, 9^{30} は 29 桁の整数であることがわかる。

次に, 9^{30} の最高位の数を求める。 $\log_{10} 2 = 0.3010$ より, $\log_{10} 4 = 0.6020$ である。(1) の結果より,

$$28 + \log_{10} 4 \leq \log_{10} 9^{30} = 28 + 0.626 < 28 + \log_{10} 5$$

である。よって,

$$\begin{aligned} \log_{10} 10^{28} + \log_{10} 4 &\leq \log_{10} 9^{30} < \log_{10} 10^{28} + \log_{10} 5 \\ \therefore \log_{10} (4 \times 10^{28}) &\leq \log_{10} 9^{30} < \log_{10} (5 \times 10^{28}) \\ \therefore 4 \times 10^{28} &\leq 9^{30} < 5 \times 10^{28} \end{aligned}$$

したがって, 9^{30} の最高位の数は 4 である。

(3) $(10 - x)^{10}$ の展開式は, 二項定理を用いて,

$$(10 - x)^{10} = \sum_{r=0}^{10} {}_{10}C_r 10^{10-r} (-x)^r$$

となる。 $r = 7$ の場合を計算すると,

$$\begin{aligned} {}_{10}C_7 10^3 (-x)^7 &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} 10^3 (-x)^7 \\ &= 120 \cdot 10^3 (-x)^7 \\ &= -120000x^7 \end{aligned}$$

となる。したがって, x^7 の項の係数は, -120000 である。

(4) $9^{30} = (10 - 1)^{30}$ の展開式を考えると, その項 ${}_{30}C_r 10^{30-r} (-1)^r$ のうち, $30 - r \geq 3$ すなわち $r \leq 27$ のものは, すべて下位 3 桁が 0 になっている。ゆえに, 9^{30} の下位 3 桁を求めるためには $r = 28, 29, 30$ の場合のみ考えればよい。 r が 0 から 27 までの項の和を A として, $9^{30} = (10 - 1)^{30}$ の展開式は, 次のように計算される。

$$\begin{aligned} 9^{30} &= (10 - 1)^{30} \\ &= A + {}_{30}C_{28} 10^{30-28} \cdot (-1)^{28} + {}_{30}C_{29} 10^{30-29} \cdot (-1)^{29} + {}_{30}C_{30} 10^{30-30} (-1)^{30} \\ &= A + {}_{30}C_2 100 + {}_{30}C_1 10 \cdot (-1) + {}_{30}C_0 \\ &= A + \frac{30 \cdot 29}{2} \cdot 100 + 30 \cdot 10 \cdot (-1) + 1 \\ &= A + 43201 \end{aligned}$$

以上より, 9^{30} の下位 3 桁は 201 となる。

[3]

- (1) 立方体の面を1つ決めると隣り合った面は4つあるので、同じ色を塗れるのは最大2面までである。よって3色すべてを使う場合は塗られる各色の面の数は $(2, 2, 2)$ となる。各色は向かい合う面にしか塗れず、そのような塗り分け方は回転させるとすべて同一となるので1通り。
- (2) 4色すべてを使う場合は塗られる各色の面の数は $(2, 2, 1, 1)$ の1通りである。4色のうち2面に塗る2色についてはそれぞれ向かい合う面にしか塗れないので、残る1組の向かい合う面に残りの2色を塗ることになる。2面に塗る2色の選び方は ${}_4C_2 = 6$ 通りであり、いずれの場合も回転させるとすべて同一の塗り分け方となるので、求める場合の数は6通り。
- (3) 1つの面を固定して考える。向かい合う面を塗る方法は $6 - 1 = 5$ 通り。残る4つの面の塗り方は回転による重なりを考慮して円順列で考えると $(4 - 1)! = 6$ 通りであるから、求める塗り分け方は $5 \times 6 = 30$ 通り。
- (4) 1つの面を固定して考える。隣り合った面は3つあり、残りの7色から3色選ぶ選び方は ${}_7C_3 = 35$ 通り。その3色の塗り分け方は回転を考慮して円順列で考えると $(3 - 1)! = 2$ 通り。残りの4つの面の塗り分け方が $4! = 24$ 通りであるから、求める塗り分け方は $35 \times 2 \times 24 = 1680$ 通り。

[4]

(1) 平均値は

$$(6+7+8+6+3+18+10+12+18+2)/10=9$$

である。分散は

$$\begin{aligned} & ((6-9)^2 + (7-9)^2 + (8-9)^2 + (6-9)^2 + (3-9)^2 \\ & + (18-9)^2 + (10-9)^2 + (12-9)^2 + (18-9)^2 \\ & + (2-9)^2)/10 \\ & = (9+4+1+9+36+81+1+9+81+49)/10 \\ & = 28 \end{aligned}$$

である。標準偏差は

$$\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

である。

(2) $Z = X + 2Y$ である。 Z の平均は

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X + 2Y) = E(X) + 2E(Y) \\ &= 11 + 2 \cdot 35 = 81 \end{aligned}$$

である。 Z の分散は

$$\begin{aligned} V(Z) &= V(X + 2Y) = V(X) + 4V(Y) \\ &= 16 + 4 \cdot 60 = 256 \end{aligned}$$

である。 Z の標準偏差は

$$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{256} = 16$$

である。

(3) (2) の答えと Z が正規分布に従うことから、100 人の総合得点の平均値 $\bar{Z}$ は正規分布 $N(81, 256/100)$ に従う。 $Z' = \frac{\bar{Z}-81}{\sqrt{256}/\sqrt{100}} = \frac{\bar{Z}-81}{1.6}$ は標準正規分布に従う。 $\bar{Z} = 1.6Z' + 81$ より $P(77 \leq \bar{Z} \leq 85) = P(77 \leq 1.6Z' + 81 \leq 85) = P(-2.5 \leq Z' \leq 2.5) = 2 \cdot P(0 \leq Z' \leq 2.5)$ 。正規分布表から $P(0 \leq Z' \leq 2.5) = 0.4938$ なので、 $P(-2.5 \leq Z' \leq 2.5) = 2 \cdot 0.4938 = 0.9876$ である。

[5]

(1) $f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$ と表すことができる。このとき、 $f(x)$ は C を定数として

$$f(x) = 3 \int (x - \alpha)(x - \beta) dx = 3 \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{\alpha + \beta}{2} x^2 + \alpha \beta x \right) + C$$

と表されるが、 $y = f(x)$ が $(0, 0)$ を通ることから $C = 0$ である。以上により

$$f(x) = 3 \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{\alpha + \beta}{2} x^2 + \alpha \beta x \right)$$

(2)

$$\begin{aligned} \text{PR} &= f(\alpha) - f(\beta) \\ &= 3 \left\{ \frac{1}{3} (\alpha^3 - \beta^3) - \frac{\alpha + \beta}{2} (\alpha^2 - \beta^2) + \alpha \beta (\alpha - \beta) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \{ 2(\alpha^2 + \alpha \beta + \beta^2) - 3(\alpha + \beta)^2 + 6\alpha \beta \} \\ &= \frac{1}{2} (\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

RQ = $\beta - \alpha$ であるから

$$S_1 = \frac{1}{2} \times (\beta - \alpha) \times \frac{1}{2} (\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{4} (\beta - \alpha)^4$$

(3)

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{ f(x) - f(\beta) \} dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} (\alpha + \beta) x^3 + \frac{3}{2} \alpha \beta x^2 - f(\beta) x \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{4} (\beta - \alpha) \{ (\beta + \alpha)(\beta^2 + \alpha^2) - 2(\alpha + \beta)(\beta^2 + \alpha \beta + \alpha^2) + 6\alpha \beta (\beta + \alpha) - 4f(\beta) \} \\ &= \frac{1}{4} (\beta - \alpha) \{ (\alpha + \beta)(4\alpha \beta - \alpha^2 - \beta^2) - 4f(\beta) \} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(4\alpha \beta - \alpha^2 - \beta^2) &= 3\alpha^2 \beta - \alpha^3 + 3\alpha \beta^2 - \beta^3, \\ 4f(\beta) &= -2\beta^3 + 6\alpha \beta^2 \end{aligned}$$

であることに注意すると、

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{4} (\beta - \alpha) (\beta^3 - 3\alpha \beta^2 + 3\alpha^2 \beta - \alpha^3) \\ &= \frac{1}{4} (\beta - \alpha)^4 \end{aligned}$$

となって、 $S_1 = S_2$ であることがわかる。

[6]

- (1) $n > 3$ ならば (a) の極限は有限とはならない。一方, $n < 3$ ならば (a) の極限值は 0 となる。
したがって $n = 3$ である。このとき

$$4 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = a_3$$

すなわち $a_3 = 4$

- (2) $f(x) = 4x^3 + a_2x^2 + a_1x + b$ に対して, (b) より

$$-3 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(4x^2 \frac{x}{\sin x} + a_2x \frac{x}{\sin x} + a_1 \frac{x}{\sin x} + \frac{b}{\sin x} \right)$$

が成り立たなければならないから, $b = 0$ かつ $a_1 = -3$ であることがわかる。

(c) は $f(x)$ の $x = 1$ における微分係数が 9 であることを意味しているから

$$f'(x) = 4 \cdot 3x^2 + 2a_2x - 3$$

に注意すると $f'(1) = 9 + 2a_2 = 9$ したがって $a_2 = 0$ を得る。よって $f(x) = 4x^3 - 3x$

(3)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/6} f(\cos \theta) d\theta &= \int_0^{\pi/6} (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/6} (4 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/6} (1 - 4 \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

ここで, $t = \sin \theta$ において置換積分を行う。

$$\begin{array}{c|c} \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{6} \\ \hline t & 0 \rightarrow \frac{1}{2} \end{array}$$

$\frac{dt}{d\theta} = \cos \theta$ であるから,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/6} (1 - 4 \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta &= \int_0^{1/2} (1 - 4t^2) dt \\ &= \left[t - \frac{4}{3}t^3 \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$