

[1]

(1)

$$\overrightarrow{AB} = (2, 3, 1), \overrightarrow{AC} = (1, 2, 1)$$

である。 $\vec{n}$ が $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ と直交することから

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a + 3b + c = 0 \quad (1)$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = a + 2b + c = 0 \quad (2)$$

$\vec{n}$ は単位ベクトルであるから

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad (3)$$

である。(1), (2) から

$$b = -a, c = a \quad (4)$$

これらを (3) に代入して解くと

$$3a^2 = 1$$

であるから, $a \geq 0$ より

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって, (4) より

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

を得る。

(2) 点 H の座標はある実数 k, l によって

$$\begin{aligned} & (1, 2, -2) + k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC} \\ &= (1, 2, -2) + k(2, 3, 1) + l(1, 2, 1) \\ &= (2k + l + 1, 3k + 2l + 2, k + l - 2) \end{aligned}$$

と書ける。また, $|m|$ を垂線の長さとする実数 m を用いると

$$\begin{aligned} & (2, 3, 1) + m \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \left(2 + \frac{m}{\sqrt{3}}, 3 - \frac{m}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{m}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

とも書ける。したがって,

$$\begin{aligned} & (2k + l + 1, 3k + 2l + 2, k + l - 2) \\ &= \left(2 + \frac{m}{\sqrt{3}}, 3 - \frac{m}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{m}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

が成り立ち, 次の連立一次方程式を得る。

$$\begin{cases} 2k + l - \frac{m}{\sqrt{3}} = 1 \\ 3k + 2l + \frac{m}{\sqrt{3}} = 1 \\ k + l - \frac{m}{\sqrt{3}} = 3 \end{cases}$$

これを解くと

$$k = -2, l = 4, m = -\sqrt{3}$$

となり, 点 H の座標は $(1, 4, 0)$, 垂線の長さは $|m| = \sqrt{3}$ である。

(3) 3 点 A, B, C を通る平面に関して点 D と対称な点の座標は,

$$(2, 3, 1) + 2\overrightarrow{DH} = (2, 3, 1) + 2(-1, 1, -1)$$

より, $(0, 5, -1)$ である。

[2]

$$(1) \quad b_n = a_{n+1} - 2a_n \text{ より, } b_{n+1} = a_{n+2} - 2a_{n+1}$$

 $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 3$ を変形すると

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n + 3 \text{ となるので}$$

$$b_{n+1} = b_n + 3$$

 $b_1 = a_2 - a_1 = 3$ なので, $\{b_n\}$ は初項 3, 公差 3 の等差数列である。したがって, $b_n = 3 + 3(n-1) = 3n$

$$(2) \quad c_n = a_n + b_n + 3 \text{ より, } c_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} + 3$$

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n, \quad b_{n+1} = b_n + 3 \text{ なので}$$

$$c_{n+1} = (2a_n + b_n) + (b_n + 3) + 3 = 2(a_n + b_n + 3) = 2c_n$$

 $c_1 = a_1 + b_1 + 3 = 6$ なので, $\{c_n\}$ は初項 6, 公比 2 の等比数列である。したがって, $c_n = 6 \cdot 2^{n-1}$

$$(3) \quad c_n = a_n + b_n + 3 = 6 \cdot 2^{n-1}, \quad b_n = 3n \text{ より}$$

$$a_n = 6 \cdot 2^{n-1} - 3n - 3$$

[3]

(1)

$${}_3C_2 \times \left(\frac{2}{10}\right)^2 \times \frac{8}{10} = 3 \times \frac{4}{5^3} = \frac{12}{125}$$

- (2) 3色のうち1色は4回目に初めて出て、すべての色の玉が出るということなので、残りの2色は、3回目までに1色は2度、1色は1度出ればよい。まず、3回目までに赤玉が2度出る場合を考える。3回目までに青玉が1度出て、4回目で白玉が初めて出る確率は、

$${}_3C_2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \frac{5}{10} \times \frac{2}{10}$$

となる。3回目までに白玉が1度出て、4回目で青玉が初めて出る確率も同じなので、結局、3回目までに赤玉が2度出て、4回目ですべての色の玉が出る確率は、

$${}_3C_2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \frac{5}{10} \times \frac{2}{10} \times 2 = \frac{540}{10^4}$$

となる。3回目までに青玉が2度出る場合の確率も同様に考えて、

$${}_3C_2 \left(\frac{5}{10}\right)^2 \frac{3}{10} \times \frac{2}{10} \times 2 = \frac{900}{10^4}$$

となる。同様に、3回目までに白玉が2度出る場合の確率は、

$${}_3C_2 \left(\frac{2}{10}\right)^2 \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} \times 2 = \frac{360}{10^4}$$

である。よって、求める確率は、

$$\frac{540 + 900 + 360}{10^4} = \frac{9}{50}$$

となる。

- (3) p_n は $n-1$ 回目までに赤玉が2度出て、 n 回目に赤玉が出る確率だから

$$\begin{aligned} p_n &= {}_{n-1}C_2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^{n-3} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{27(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{7^{n-3}}{10^n} \end{aligned}$$

- (4) $n \geq 3$ において $p_n > 0$ であることと

$$p_{n+1} = \frac{27n(n-1)}{2} \cdot \frac{7^{n-2}}{10^{n+1}}$$

に注意して

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{7n}{10(n-2)}$$

$\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ となる n の値の範囲、すなわち $p_n > p_{n+1}$

となる n の範囲は $\frac{7n}{10(n-2)} < 1$ を解いて $n > \frac{20}{3}$ 、

逆に $p_n < p_{n+1}$ となる n の値の範囲は $n < \frac{20}{3}$ である。つまり

$$p_3 < p_4 < \cdots < p_6 < p_7 > p_8 > \cdots$$

したがって、 $n=7$ のとき p_n は最大となる。

〔4〕

- (1) 確率変数 X は平均 $m = 80$, 分散 $\sigma^2 = 0.25$ の正規分布に従うので, 確率変数 $Z = \frac{X - m}{\sigma} = \frac{X - 80}{0.5}$ は標準正規分布に従う。したがって, 付表の正規分布表より

$$\begin{aligned} P(78.88 \leq X \leq 81.12) &= P(-2.24 \leq Z \leq 2.24) \\ &= 2 \times P(0 \leq Z \leq 2.24) \\ &= 2 \times 0.4875 \\ &= 0.975 \end{aligned}$$

となるので, ネジが不良品となる確率は $1 - 0.975 = 0.025$ である。

- (2) (1) より, 確率変数 Y は二項分布 $B(1000, 0.025)$ に従う。したがって,

$$E[Y] = 1000 \times 0.025 = 25$$

$$V[Y] = 1000 \times 0.025 \times 0.975 = 24.375$$

- (3) Y の期待値がちょうど5となる σ の値を $\bar{\sigma}$ とすると,

$$1000 \times (1 - P(78.88 \leq X \leq 81.12)) = 5$$

$$1000 \times P(78.88 \leq X \leq 81.12) = 995$$

$$P\left(\frac{78.88 - 80}{\bar{\sigma}} \leq Z \leq \frac{81.12 - 80}{\bar{\sigma}}\right) = 0.995$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{1.12}{\bar{\sigma}}\right) = 0.4975$$

が得られる。正規分布表より,

$$P(0 \leq Z \leq 2.80) < 0.4975 < P(0 \leq Z \leq 2.81)$$

なので,

$$\frac{1.12}{2.81} < \bar{\sigma} < \frac{1.12}{2.80}$$

が得られる。

$$\frac{1.12}{2.81} \approx 0.398$$

$$\frac{1.12}{2.80} = 0.4$$

より,

$$0.39 < \bar{\sigma} < 0.40$$

である。したがって, $\sigma = 0.40$ のとき $E[Y] > 5$ であり, $\sigma = 0.39$ のときに初めて $E[Y] < 5$ となる。

[5]

- (1) $f'(x) = 3x^2 - 4(a+2)x + 2(4a+b)$ 。したがって条件より、

$$\begin{cases} f(2) = g(2) \\ f'(2) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 4b - c - 8 = 7 \\ 2b - 4 = 2 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} b = 3 \\ c = -3 \end{cases}$$

- (2) (1) より $f(x) = x^3 - 2(a+2)x^2 + 2(4a+3)x - 8a + 3$ なので

$$f(x) - g(x) = x^3 - 2(a+2)x^2 + 4(2a+1)x - 8a$$

$f(x) - g(x)$ を $x-2$ で割ると

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2(a+2) & 4(2a+1) & -8a & 2 \\ & 2 & -4(a+1) & 8a & \\ \hline 1 & -2(a+1) & 4a & 0 & \end{array}$$

から、商 $x^2 - 2(a+1)x + 4a = (x-2)(x-2a)$ 、余り 0 であるので

$$f(x) - g(x) = (x-2)^2(x-2a)$$

したがって、題意の求める条件は、 $2a \neq 2$ 、すなわち、 $a \neq 1$ 。

- (3) (2) より、 $a \neq 1$ とする。

- (a) $1 < a \iff 2 < 2a$ であるとき：
 $2 \leq x \leq 2a$ において、

$$f(x) - g(x) = (x-2)^2(x-2a) \leq 0$$

なので、 $g(x) \geq f(x)$

よって、求める面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \int_2^{2a} \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_2^{2a} \{-x^3 + 2(a+2)x^2 - 4(2a+1)x + 8a\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2(a+2)}{3}x^3 - 2(2a+1)x^2 + 8ax \right]_2^{2a} \\ &= \frac{1}{3}(4a^4 - 16a^3 + 24a^2) - \frac{1}{3}(16a - 4) \\ &= \frac{4}{3}(a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1) \\ &= \left(\frac{4}{3}(a-1)^4 \right) \end{aligned}$$

- (b) $a < 1 \iff 2a < 2$ であるとき：
 $2a \leq x \leq 2$ において、

$$f(x) - g(x) = (x-2)^2(x-2a) \geq 0$$

なので、 $f(x) \geq g(x)$

よって同様に求める面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \int_{2a}^2 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= - \int_2^{2a} \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_2^{2a} \{g(x) - f(x)\} dx \end{aligned}$$

であるから、(a) より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{3}(a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1) \\ &= \left(\frac{4}{3}(a-1)^4 \right) \end{aligned}$$

- (3) 別解 (2) より、 $a \neq 1$ とする。求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{2a}^2 \{f(x) - g(x)\} dx \right| \\ &= \left| \int_{2a}^2 (x-2)^2(x-2a) dx \right| \\ &= \left| \int_{2a}^2 (x-2)^2(x-2+2-2a) dx \right| \\ &= \left| \int_{2a}^2 \{(x-2)^3 + 2(1-a)(x-2)^2\} dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{(x-2)^4}{4} \right]_{2a}^2 - 2(a-1) \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_{2a}^2 \right| \\ &= \left| -\frac{16(a-1)^4}{4} + 2(a-1) \frac{8(a-1)^3}{3} \right| \\ &= \left| -\frac{16}{4}(a-1)^4 + \frac{16}{3}(a-1)^4 \right| \\ &= \frac{4}{3}(a-1)^4 \end{aligned}$$

[6]

求める回転体の体積を V とする。曲線 $y = x^2 - 4x + 4$ は点 $(2, 0)$ で x 軸と接し、点 $(0, 4)$ で y 軸と交わるので、曲線 $y = x^2 - 4x + 4$ ($x \geq 2$) と直線 $y = 9$, x 軸, y 軸で囲まれた領域を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1 、曲線 $y = x^2 - 4x + 4$ ($0 \leq x \leq 2$) と x 軸と y 軸で囲まれた領域を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_2 としたとき、 $V = V_1 - V_2$ となる。

曲線 $y = x^2 - 4x + 4$ と直線 $y = h$ ($h \geq 0$) の交点の x 座標は

$$x = 2 \pm \sqrt{h}$$

なので、

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^9 \pi (2 + \sqrt{h})^2 dh \\ &= \pi \left[4h + \frac{8}{3} (\sqrt{h})^3 + \frac{1}{2} h^2 \right]_0^9 \\ &= \frac{297}{2} \pi \\ V_2 &= \int_0^4 \pi (2 - \sqrt{h})^2 dh \\ &= \pi \left[4h - \frac{8}{3} (\sqrt{h})^3 + \frac{1}{2} h^2 \right]_0^4 \\ &= \frac{8}{3} \pi \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 \\ &= \frac{875}{6} \pi \end{aligned}$$