令和５年度　　入学者選抜学力試験　数学（前期／ＤＳ）解答例

〔１〕 n を自然数とする。$n+1$ から $2n$ までの積を a_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1) a_4 を素因数分解せよ。

(2) $a_n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots\cdots \cdot (2n-1)$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) a_n を 2^{n+1} で割った余りを求めよ。

---

(1) $a_4 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

(2) ① $n=1$ のとき $a_1 = 2 = 2^1 \cdot 1$ なので成り立つ。

② $n=k$ のとき

$$a_k = 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1)$$

が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}
&a_{k+1}\\
&= (k+2)(k+3)\cdots(2k)(2k+1)\{2(k+1)\}\\
&= 2\{(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(2k)\}(2k+1)\\
&= 2a_k(2k+1)\\
&= 2 \cdot 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)\\
&= 2^{k+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k+1)
\end{aligned}$$

となって $n=k+1$ のときも成り立つ。したがって数学的帰納法により等式は証明された。

(3) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)$ は 1 から $2n-1$ までの奇数の積なので正の奇数である。したがってある 0 以上の整数 m によって

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) = 2m+1$$

と表すことが出来る。よって

$$\begin{aligned}
a_n &= 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)\\
&= 2^n(2m+1)\\
&= m \cdot 2^{n+1} + 2^n
\end{aligned}$$

$m \geqq 0$, $2^n < 2^{n+1}$ なので a_n を 2^{n+1} で割った余りは 2^n である。

〔2〕 三角形ABCにおいて$\angle \mathrm{A} = A$, $\angle \mathrm{B} = B$, $\angle \mathrm{C} = C$とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\cos 2A + \cos 2B = 2\cos(A+B)\cos(A-B)$が成り立つことを示せ。

(2) $1 - \cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 4\sin A \sin B \cos C$が成り立つことを示せ。

(3) $A = B$のとき, $1 - \cos 2A - \cos 2B + \cos 2C$の最小値を求めよ。

---

(1) 加法定理より

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \cdots ①$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \cdots ②$$

① + ② より

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$\alpha+\beta = 2A$, $\alpha-\beta = 2B$とすると

$$\alpha = A+B, \quad \beta = A-B$$

よって

$$\cos 2A + \cos 2B = 2\cos(A+B)\cos(A-B)$$

(2) (1)と倍角の公式より

$$\begin{aligned}&[左辺]\\ &= 1 + \cos 2C - (\cos 2A + \cos 2B)\\ &= 2\cos^2 C - 2\cos(A+B)\cos(A-B)\end{aligned}$$

$A+B+C = \pi$なので$\cos(A+B) = -\cos C$が成り立ち,

$$\begin{aligned}&[左辺]\\ &= 2\cos^2 C + 2\cos C\cos(A-B)\\ &= 2\cos C(\cos C + \cos(A-B))\\ &= 2\cos C(-\cos(A+B) + \cos(A-B))\end{aligned}$$

加法定理より

$$\begin{aligned}&-\cos(A+B) + \cos(A-B)\\ &= -\cos A\cos B + \sin A\sin B\\ &\qquad + \cos A\cos B + \sin A\sin B\\ &= 2\sin A\sin B\end{aligned}$$

したがって,

$$[左辺] = 4\sin A\sin B\cos C$$

(3) $A = B$のとき(2)より

$$\begin{aligned}[与式] &= 4\sin^2 A\cos(\pi - 2A)\\ &= -4\sin^2 A\cos 2A\\ &= -4\sin^2 A(1 - 2\sin^2 A)\\ &= 8\sin^4 A - 4\sin^2 A\\ &= 8\left(\sin^2 A - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$A+B+C = 2A+C = \pi$より$0 < A < \frac{\pi}{2}$。したがって$\sin A = \frac{1}{2}$, すなわち$A = \frac{\pi}{6}$のとき最小値$-\frac{1}{2}$をとる。

〔3〕-【A】 3個のさいころを同時に投げる。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 出る目が 3, 4, 5 それぞれ 1 個ずつとなる確率を求めよ。

(2) 出る目の中央値が 3 となる確率を求めよ。

(3) 出る目の最大値と最小値の差が 0, 1, 2, 3, 4, 5 となる確率をそれぞれ求めよ。

---

(1) 3 個のさいころの目の出方は全部で 6^3 通り。そのうち 3, 4, 5 が 1 個ずつ出るのは 3! 通り。したがって確率は

$$\frac{3!}{6^3} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

(2) 中央値が 3 となる出目の組合せは以下の 4 つの場合である。

① すべての目が 3

これは 1 通りしかない。

② 3 が 2 個と 3 以外の目が 1 個

どのさいころで 3 以外の目となるかで 3 通り, 3 以外のどの目になるかで 5 通りあるので, 計 $3 \times 5 = 15$ 通り。

③ 3 が 1 個, 3 よりも小さな目が 1 個, 3 よりも大きな目が 1 個

どのさいころがどの目になるかで 3! 通り, 3 よりも小さな目と大きな目がどれになるかで 2×3 通りあるので, 計 $3! \times 2 \times 3 = 36$ 通り。

したがって確率は

$$\frac{1+15+36}{6^3} = \frac{13}{54}$$

(3) ① 差が 0

すべての目が等しい場合なので 6 通り。

② 差が 1

最小値と最大値の組合せは (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6) の 5 通り。それぞれの組合せで最小値と最大値どちらが 2 回出るかで 2 通り, どのさいころが 1 回しか出ない目となるかで 3 通りあるので, 計 $5 \times 2 \times 3 = 30$ 通り。

③ 差が 2

最小値と最大値の組合せは (1,3), (2,4), (3,5), (4,6) の 4 通り。それぞれの組合せで (a) 最小値と最大値のどちらかが 2 回出る, (b) すべて違う目が出る, の 2 つの場合があり, (a) の場合は②と同様に考えて $4 \times 2 \times 3 = 24$ 通り。(b) の場合は異なる 3 つの目が出るので $4 \times 3! = 24$ 通り, 計 48 通り。

④ 差が 3

最小値と最大値の組合せは (1,4), (2,5), (3,6) の 3 通り。③と同様に考えて, (a) の場合は $3 \times 2 \times 3 = 18$ 通り。(b) の場合は最小値と最大値以外の目が何になるかで 2 通り, 異なる 3 つの目の出方で 3! 通りあるので $3 \times 2 \times 3! = 36$ 通り, 計 54 通り。

⑤ 差が 4

最小値と最大値の組合せは (1,5), (2,6) の 2 通り。④と同様に考えて, (a) の場合は $2 \times 2 \times 3 = 12$ 通り。(b) の場合は $2 \times 3 \times 3! = 36$ 通り, 計 48 通り。

⑥ 差が 5

最小値と最大値の組合せは (1,6) の 1 通り。④と同様に考えて, (a) の場合は $1 \times 2 \times 3 = 6$ 通り。(b) の場合は $1 \times 4 \times 3! = 24$ 通り, 計 30 通り。

以上より差が 0, 1, 2, 3, 4, 5 となる確率はそれぞれ,

$$\frac{1}{36}, \frac{5}{36}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{5}{36}$$

〔3〕-【B】 ある工場で作られているまんじゅうについて，まんじゅう1つの重さを X グラムとするとき，確率変数 X が平均 $m=40$，分散 $\sigma^2=18$ の正規分布 $N(40,18)$ に従うとみなせるものとする。このとき，次の問いに答えよ。なお，$\sqrt{2}=1.41$ とし、付表の正規分布表を利用してよい。

(1) 作ったすべてまんじゅうの個数に対する，重さが35グラム以上のまんじゅうの個数の割合を求めよ。ただし，小数第3位を四捨五入せよ。

(2) 無作為に選ばれた50個のまんじゅうが入ったまんじゅうセットを考える。1つのセットに入ったまんじゅうの重さの合計を Y グラムとするとき，確率変数 Y の平均と分散を求めよ。

(3) (2) で考えたまんじゅうセットに対してある整数 T を定め,「内容量約 T グラム」という表記を付けることを考える。ここで T は，たくさんのまんじゅうセットから無作為に1つのセットを取り出した際に，95%以上の確率でそのセットに含まれるまんじゅうの重さの合計 Y グラムが $Y \geqq T$ となるように定める。このとき，T の最大値を求めよ。

(付表は省略)

---

(1) Z が標準正規分布に従うとすると，

$X=40+\sqrt{18}Z$

である。よって，

$$\begin{aligned} & P(X \geqq 35) \\ = & P(40+\sqrt{18}Z \geqq 35) \\ = & P(Z \geqq \frac{-5}{3\sqrt{2}}) \\ = & P(Z \geqq 0)+P(-0 \geqq Z \geqq -1.18) \\ = & P(Z \geqq 0)+P(0 \leqq Z \leqq 1.18) \\ = & 0.5+0.3810 \\ = & 0.881 \end{aligned}$$

小数第3位を四捨五入して，0.88。

(2) まんじゅう全体から無作為に50個を標本抽出したときの X の標本平均を $\overline{X}$ とすると，$\overline{X}$ は正規分布 $N(40,\frac{18}{50})$ に近似的に従う。また，$Y=50\overline{X}$ である。

よって，Y の平均は2000，分散は900である。

(3) Z を標準正規分布に従う確率変数とすると，近似的に

$Y=30Z+2000$

である。よって，T が満たすべき条件は，

$P(Y \geqq T) \geqq 0.95$

$P(30Z+2000 \geqq T) \geqq 0.95$

$P(Z \geqq \frac{T-2000}{30}) \geqq 0.95$

ここで，標準正規分布の性質より，$P(Z \geqq a) \geqq 0.95$ は，$a>0$ では，成立しないため，

$\frac{T-2000}{30}<0$

である。よって，

$P(Z \geqq 0)+P(0 \geqq Z \geqq \frac{T-2000}{30}) \geqq 0.95$

$P(0 \leqq Z \leqq \frac{2000-T}{30}) \geqq 0.45$

正規分布表より，

$P(0 \leqq Z \leqq 1.64)=0.4495$

$P(0 \leqq Z \leqq 1.65)=0.4505$

であり，$\frac{2000-T}{30}=1.64$ の場合は $P(0 \leqq Z \leqq \frac{2000-T}{30})<0.45$ となり条件を満たさない。また、$\frac{2000-T}{30}=1.65$ とすると $P(0 \leqq Z \leqq \frac{2000-T}{30})>0.45$ であり，確率 $P(0 \leqq Z \leqq u)$ は u が大きくなるにつれて増加するため，$\frac{2000-T}{30} \geqq 1.65$ であれば条件を満たす。

よって，

$T \leqq 1950$

$T = 1950$ が条件を満たす最大値である。

(2) **【別解】**

正規分布の再生性 (学習指導要領外) より，互いに独立な確率変数 X_1, X_2 が，それぞれ，正規分布 $N(m_1, \sigma_1^2)$, $N(m_2, \sigma_2^2)$ に従うとき，$X_1 + X_2$ は正規分布 $N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ に従うことが知られている。よって，50 個のまんじゅうの重さそれぞれを互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \ldots X_{50}$ で表すと，$Y = \sum_{k=1}^{50} X_k$ は，正規分布 $N(\sum_{k=1}^{50} m, \sum_{k=1}^{50} \sigma^2)$ に従う。

よって，Y は正規分布 $N(2000, 30^2)$ に従う。

〔4〕-【C】 $t>0$ とする。放物線 $C: y=x^2-4x+5$ 上の点 $\mathrm{P}(t, t^2-4t+5)$ から x 軸, y 軸にそれぞれ垂線 PA, PB を下ろす。原点を O とし, 長方形 OAPB の内部で C の下側にある部分の面積を $S(t)$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $S(t)$ を求めよ。

(2) 関数 $S(t)$ の増減を調べよ。

---

(1) ① $0<t\leqq 2$ のとき

OAPB は全体が C の下側にあるので,

$$S(t)=t(t^2-4t+5)=t^3-4t^2+5t$$

② $2<t\leqq 4$ のとき

辺 PB は C と 2 つの共有点を持ち, 求める面積は OAPB の面積から C と PB で囲まれた部分の面積を引いたものである。2 つの共有点のうち 1 つは当然 P でありその x 座標は t。もう 1 つの共有点の x 座標は放物線の対称性より

$$2-(t-2)=4-t$$

したがって,

$$\begin{aligned}
&S(t)\\
&=t^3-4t^2+5t\\
&\quad-\int_{4-t}^{t}\left(t^2-4t+5-(x^2-4x+5)\right)dx\\
&=t^3-4t^2+5t+\int_{4-t}^{t}(x-t)(x-4+t)dx\\
&=t^3-4t^2+5t-\frac{(2t-4)^3}{6}\\
&=t^3-4t^2+5t-\frac{8(t^3-6t^2+12t-8)}{6}\\
&=-\frac{1}{3}t^3+4t^2-11t+\frac{32}{3}
\end{aligned}$$

③ $t>4$ のとき

$0<x\leqq t$ で C は OAPB の内部にあるので,

$$\begin{aligned}
S(t)&=\int_0^t(x^2-4x+5)dx\\
&=\frac{1}{3}t^3-2t^2+5t
\end{aligned}$$

(2) ① $0<t\leqq 2$ のとき

$$S'(t)=3t^2-8t+5=(t-1)(3t-5)$$

② $2<t\leqq 4$ のとき

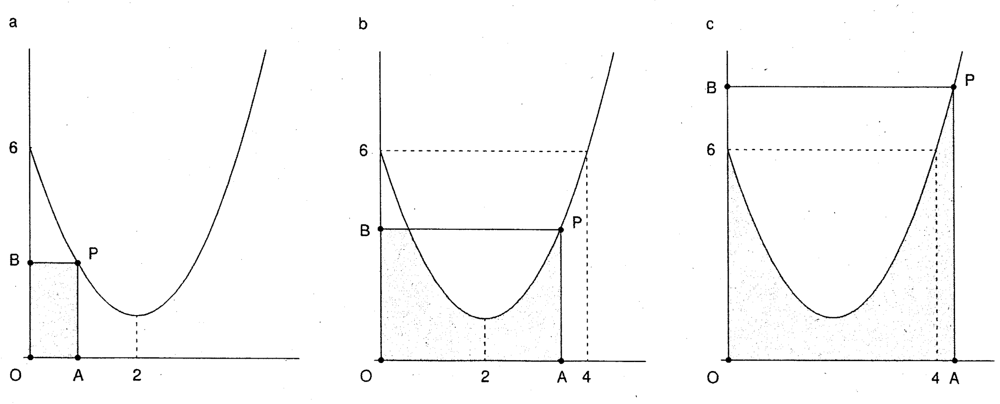
$$S'(t)=-t^2+8t-11=-(t-4)^2+5>0$$

③ $t>4$ のとき

$$S'(t)=t^2-4t+5=(t-2)^2+1>0$$

したがって増減表は以下のとおり。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$S(t)$		↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗



〔4〕-【D】 a を正の定数，$x > 0$ であるとし，次の 2 つの関数を考える。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{a}{2x}}$$

$$g(x) = \log f(x)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $g(x)$ を求めよ。

(2) $g(x)$ が最大となる x の値を求めよ。

(3) $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

---

(1)

$$\begin{aligned} g(x) &= \log f(x) \\ &= \log \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{a}{2x}} \\ &= \log \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} + \log e^{-\frac{a}{2x}} \\ &= \log (2\pi x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{a}{2x} \\ &= -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log x - \frac{a}{2x} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{2x} + \frac{a}{2x^2} \\ &= \frac{-x+a}{2x^2} \end{aligned}$$

$x = a$ のとき $g'(x) = 0$ であり，$x < a$ のときは $g'(x) > 0$，$x > a$ のときは $g'(x) < 0$ である。よって，$g(x)$ は上に凸であり，$x = a$ のときに最大となる。

(3) 対数関数は単調増加であるため，$g(x)$ が最大となるときに $f(x)$ も最大となる。よって，$f(x)$ が最大となるのは $x = a$ のときであり，最大値は，

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi e a}} \end{aligned}$$