令和５年度　　入学者選抜学力試験　数学（前期／教育・経済）解答例

〔１〕

(1) $a_4 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

(2) ① $n = 1$ のとき $a_1 = 2 = 2^1 \cdot 1$ なので成り立つ。

② $n = k$ のとき

$$a_k = 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1)$$

が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned}
&a_{k+1}\\
&= (k+2)(k+3)\cdots(2k)(2k+1)\{2(k+1)\}\\
&= 2\{(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(2k)\}(2k+1)\\
&= 2a_k(2k+1)\\
&= 2 \cdot 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)\\
&= 2^{k+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k+1)
\end{aligned}$$

となって $n = k+1$ のときも成り立つ。したがって数学的帰納法により等式は証明された。

(3) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)$ は 1 から $2n-1$ までの奇数の積なので正の奇数である。したがってある 0 以上の整数 m によって

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) = 2m+1$$

と表すことが出来る。よって

$$\begin{aligned}
a_n &= 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)\\
&= 2^n(2m+1)\\
&= m \cdot 2^{n+1} + 2^n
\end{aligned}$$

$m \geqq 0,\ 2^n < 2^{n+1}$ なので a_n を 2^{n+1} で割った余りは 2^n である。

〔２〕

(1) 3 個のさいころの目の出方は全部で 6^3 通り。そのうち 3, 4, 5 が 1 個ずつ出るのは 3! 通り。したがって確率は

$$\frac{3!}{6^3} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

(2) 中央値が 3 となる出目の組合せは以下の 4 つの場合である。

① すべての目が 3

これは 1 通りしかない。

② 3 が 2 個と 3 以外の目が 1 個

どのさいころで 3 以外の目となるかで 3 通り，3 以外のどの目になるかで 5 通りあるので，計 $3 \times 5 = 15$ 通り。

③ 3 が 1 個，3 よりも小さな目が 1 個，3 よりも大きな目が 1 個

どのさいころがどの目になるかで 3! 通り，3 よりも小さな目と大きな目がどれになるかで 2×3 通りあるので，計 $3! \times 2 \times 3 = 36$ 通り。

したがって確率は

$$\frac{1+15+36}{6^3} = \frac{13}{54}$$

(3) ① 差が 0

すべての目が等しい場合なので 6 通り。

② 差が 1

最小値と最大値の組合せは (1,2)，(2,3)，(3,4)，(4,5)，(5,6) の 5 通り。それぞれの組合せで最小値と最大値どちらが 2 回出るかで 2 通り，どのさいころが 1 回しか出ない目となるかで 3 通りあるので，計 $5 \times 2 \times 3 = 30$ 通り。

③ 差が 2

最小値と最大値の組合せは (1,3)，(2,4)，(3,5)，(4,6) の 4 通り。それぞれの組合せで (a) 最小値と最大値のどちらかが 2 回出る，(b) すべて違う目が出る，の 2 つの場合があり，(a) の場合は②と同様に考えて $4 \times 2 \times 3 = 24$ 通り。(b) の場合は異なる 3 つの目が出るので $4 \times 3! = 24$ 通り，計 48 通り。

④ 差が 3

最小値と最大値の組合せは (1,4)，(2,5)，(3,6) の 3 通り。③と同様に考えて，(a) の場合は $3 \times 2 \times 3 = 18$ 通り。(b) の場合は最小値と最大値以外の目が何になるかで 2 通り，異なる 3 つの目の出方で 3! 通りあるので $3 \times 2 \times 3! = 36$ 通り，計 54 通り。

⑤ 差が 4

最小値と最大値の組合せは (1,5)，(2,6) の 2 通り。④と同様に考えて，(a) の場合は $2 \times 2 \times 3 = 12$ 通り。(b) の場合は $2 \times 3 \times 3! = 36$ 通り，計 48 通り。

⑥ 差が 5

最小値と最大値の組合せは (1,6) の 1 通り。④と同様に考えて，(a) の場合は $1 \times 2 \times 3 = 6$ 通り。(b) の場合は $1 \times 4 \times 3! = 24$ 通り，計 30 通り。

以上より差が 0, 1, 2, 3, 4, 5 となる確率はそれぞれ，

$$\frac{1}{36}, \frac{5}{36}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{5}{36}$$

〔３〕

(1) 加法定理より

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\cdots$①

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cdots$②

①＋② より

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

$\alpha+\beta=2A,\ \alpha-\beta=2B$ とすると

$$\alpha=A+B,\quad \beta=A-B$$

よって

$$\cos 2A+\cos 2B=2\cos(A+B)\cos(A-B)$$

(2) (1) と倍角の公式より

$$\begin{aligned}&[\text{左辺}]\\&=1+\cos 2C-(\cos 2A+\cos 2B)\\&=2\cos^2 C-2\cos(A+B)\cos(A-B)\end{aligned}$$

$A+B+C=\pi$ なので $\cos(A+B)=-\cos C$ が成り立ち,

$$\begin{aligned}&[\text{左辺}]\\&=2\cos^2 C+2\cos C\cos(A-B)\\&=2\cos C(\cos C+\cos(A-B))\\&=2\cos C(-\cos(A+B)+\cos(A-B))\end{aligned}$$

加法定理より

$$\begin{aligned}&-\cos(A+B)+\cos(A-B)\\&=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\\&\qquad+\cos A\cos B+\sin A\sin B\\&=2\sin A\sin B\end{aligned}$$

したがって,

$$[\text{左辺}]=4\sin A\sin B\cos C$$

(3) $A=B$ のとき (2) より

$$\begin{aligned}[\text{与式}]&=4\sin^2 A\cos(\pi-2A)\\&=-4\sin^2 A\cos 2A\\&=-4\sin^2 A(1-2\sin^2 A)\\&=8\sin^4 A-4\sin^2 A\\&=8\left(\sin^2 A-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$A+B+C=2A+C=\pi$ より $0<A<\dfrac{\pi}{2}$。したがって $\sin A=\dfrac{1}{2}$, すなわち $A=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとる。

〔４〕

(1) ① $0 < t \leqq 2$ のとき

OAPB は全体が C の下側にあるので,

$$S(t) = t(t^2 - 4t + 5) = t^3 - 4t^2 + 5t$$

② $2 < t \leqq 4$ のとき

辺 PB は C と２つの共有点を持ち, 求める面積は OAPB の面積から C と PB で囲まれた部分の面積を引いたものである。２つの共有点のうち１つは当然 P でありその x 座標は t。もう１つの共有点の x 座標は放物線の対称性より

$$2 - (t - 2) = 4 - t$$

したがって,

$$\begin{aligned} &S(t) \\ &= t^3 - 4t^2 + 5t \\ &\quad - \int_{4-t}^{t} \left(t^2 - 4t + 5 - (x^2 - 4x + 5)\right) dx \\ &= t^3 - 4t^2 + 5t + \int_{4-t}^{t} (x - t)(x - 4 + t) dx \\ &= t^3 - 4t^2 + 5t - \frac{(2t-4)^3}{6} \\ &= t^3 - 4t^2 + 5t - \frac{8(t^3 - 6t^2 + 12t - 8)}{6} \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 11t + \frac{32}{3} \end{aligned}$$

③ $t > 4$ のとき

$0 < x \leqq t$ で C は OAPB の内部にあるので,

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t (x^2 - 4x + 5) dx \\ &= \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5t \end{aligned}$$

(2) ① $0 < t \leqq 2$ のとき

$$S'(t) = 3t^2 - 8t + 5 = (t - 1)(3t - 5)$$

② $2 < t \leqq 4$ のとき

$$S'(t) = -t^2 + 8t - 11 = -(t-4)^2 + 5 > 0$$

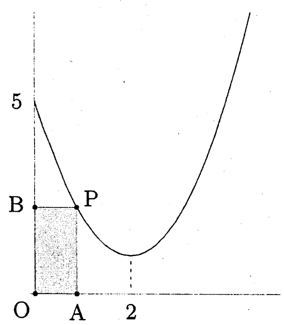
③ $t > 4$ のとき

$$S'(t) = t^2 - 4t + 5 = (t - 2)^2 + 1 > 0$$

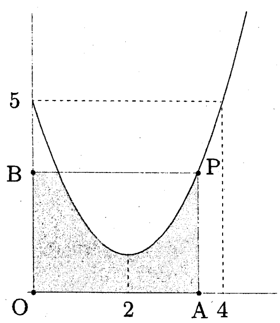
したがって増減表は以下のとおり。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$S(t)$		↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗

① $0 < t \leqq 2$



② $2 < t \leqq 4$



③ $t > 4$