令 和 5 年 度

入学者選抜学力試験問題

数　　　学（後期）

〔注　　　意〕

1. 監督者の指示があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. この冊子の問題は 2 ページからなる。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば監督者に申し出て，問題冊子の交換を受けること。
3. 監督者の指示に従って，解答用紙（4 枚）すべてに受験番号および氏名を必ず記入すること。
4. 解答は，必ず解答用紙（4 枚）の指定された枠内に記入すること。書ききれない場合は解答用紙の裏面の指定された枠内に記入すること。
5. この問題冊子は持ち帰ること。

〔1〕 3人の生徒がそれぞれ1枚のコインと1個のさいころを1回ずつ投げる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) コインの表が出た生徒が少なくとも1人いるとき，3枚とも表である確率を求めよ。

(2) 表が出る生徒が2人で，そのうち少なくとも1人はさいころの1の目が出る確率を求めよ。

(3) 表と1の目が出た生徒が少なくとも1人いるとき，3枚とも表である確率を求めよ。

〔2〕 数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2) $a_4x + a_5y = 1$ を満たす整数の組$(x,\ y)$のうち，xの絶対値が50に最も近いものを求めよ。

(3) $n \geqq 3$ について，$3 < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{10}{3}$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。

〔3〕 Oを原点とする座標平面上に点A$(\sqrt{3}, 1)$がある。点P(x, y)が

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 2\,\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} - 1$$

を満たして動くとき，Pの軌跡をCとする。また，直線$ax + by = 0$をℓとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) Cの方程式を求めよ。

(2) ℓがCと共有点をもつためのa，bの条件を示せ。

(3) ℓとCが接するとき，接点の座標を求めよ。

(4) OからCへは2本の接線が引ける。これら2本の接線とCで囲まれる図形の面積を求めよ。

〔4〕 kを定数とする。3次関数$f(x) = 2x^3 + kx^2 - 3(k+1)x - 5$が$x = \alpha$で極大値をとり，$x = \beta$で極小値をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) kの値の範囲を求めよ。

(2) $f(\alpha) - f(\beta) = (\beta - \alpha)^3$が成り立つことを示せ。

(3) 極大値と極小値の差が27で$k > 0$のとき，方程式$f(x) = m$が異なる3つの実数解をもち，正の解が1つであるような定数mの値の範囲を求めよ。