〔 1 〕

(1) コインの表が出た生徒が少なくとも 1 人いる事象を A とする。3 人ともコインの裏が出た事象は事象 A の余事象 $\overline{\mathrm{A}}$ である。事象 $\overline{\mathrm{A}}$ の確率 $P(\overline{\mathrm{A}})$ は $P(\overline{\mathrm{A}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ なので，事象 A の確率 $P(\mathrm{A})$ は $P(\mathrm{A}) = 1 - P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ である。

3 人とも表が出る事象を B とおくと，事象 B の確率は $P(\mathrm{B}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ である。したがって，事象 A が起こったときの事象 B が起こる条件付き確率 $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ は

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} = \frac{P(\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{7}$$

である。

(2) 表が出る生徒が 2 人いる事象を C，表が出る生徒が 2 人で両者ともさいころの目が 1 以外である事象を D，表が出る生徒が 2 人でそのうち少なくとも 1 人は 1 の目が出る事象を E とする。このとき，事象 D と事象 E は互いに排反であり，$\mathrm{C} = \mathrm{D} \cup \mathrm{E}$ である。したがって，事象 C, D，E の確率 $P(\mathrm{C})$，$P(\mathrm{D})$，$P(\mathrm{E})$ について，$P(\mathrm{C}) = P(\mathrm{D}) + P(\mathrm{E})$ である。ここで，表が出る生徒が 2 人で裏が出る生徒が 1 人となる場合の数は ${}_3\mathrm{C}_2$ となることから，$P(\mathrm{E})$ は

$$\begin{aligned} P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{C}) - P(\mathrm{D}) &= {}_3\mathrm{C}_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - {}_3\mathrm{C}_2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{6}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{6}\right) \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(1 - \frac{5^2}{6^2}\right) = \frac{3 \times 11}{8 \times 36} = \frac{11}{96} \end{aligned}$$

となる。

(3) 1 人の生徒が 1 枚のコインと 1 個のさいころを同時に投げ，表かつ 1 の目が出る確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

である。これより，表かつ 1 の目が出た生徒が 1 人もいない事象を F とおくと，事象 F の確率 $P(\mathrm{F})$ は

$$P(\mathrm{F}) = \left(1 - \frac{1}{12}\right)^3 = \frac{11^3}{12^3}$$

となる。

したがって，表かつ 1 の目が出た生徒が少なくとも 1 人いる事象を G とおくと，G は F の余事象だから，事象 G の確率 $P(\mathrm{G})$ は

$$P(\mathrm{G}) = 1 - P(\mathrm{F}) = 1 - \frac{11^3}{12^3} = \frac{12^3 - 11^3}{12^3} = \frac{(12-11)(12^2 + 12 \times 11 + 11^2)}{12^3} = \frac{397}{12^3}$$

となる。
ここで，3 人とも表が出る事象を H とおくと，F と H の共通事象（積事象）$\mathrm{F}\cap\mathrm{H}$ は，1 の目が出た生徒が 1 人もいなくて 3 枚とも表である事象を表す。したがって，その確率 $P(\mathrm{F}\cap\mathrm{H})$ は

$$P(\mathrm{F}\cap\mathrm{H}) = \left(\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{12^3}$$

となる。
G と H の共通事象 $\mathrm{G}\cap\mathrm{H}$ は，1 の目が出た生徒が少なくとも 1 人いて 3 枚とも表である事象を表す。
ここで，事象 G は事象 F の余事象なので，$\mathrm{G}\cap\mathrm{H}$ と $\mathrm{F}\cap\mathrm{H}$ は互いに排反となり，両事象の和事象は

$$(\mathrm{G}\cap\mathrm{H})\cup(\mathrm{F}\cap\mathrm{H}) = \mathrm{H}$$

となる。したがって，事象 $\mathrm{G}\cap\mathrm{H}$ の確率 $P(\mathrm{G}\cap\mathrm{H})$ は

$$\begin{aligned} P(\mathrm{G}\cap\mathrm{H}) &= P(\mathrm{H}) - P(\mathrm{F}\cap\mathrm{H}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{5^3}{12^3} = \frac{6^3-5^3}{12^3} = \frac{(6-5)(6^2+6\times5+5^2)}{12^3} = \frac{91}{12^3} \end{aligned}$$

となる。
求める確率は，事象 G が起こったときの事象 $\mathrm{G}\cap\mathrm{H}$ が起こる条件付き確率 $P_{\mathrm{G}}(\mathrm{G}\cap\mathrm{H})$ であることから，

$$P_{\mathrm{G}}(\mathrm{G}\cap\mathrm{H}) = \frac{P(\mathrm{G}\cap\mathrm{H})}{P(\mathrm{G})} = \frac{91}{12^3}\times\frac{12^3}{397} = \frac{91}{397}$$

となる。

〔2〕

(1) a_3，a_4，a_5 は

$$a_3 = 3a_2 + a_1 = 3 \times 1 + 1 = 4$$
$$a_4 = 3a_3 + a_2 = 3 \times 4 + 1 = 13$$
$$a_5 = 3a_4 + a_3 = 3 \times 13 + 4 = 43$$

である。

(2) 題意の不定方程式は，$a_4 = 13$，$a_5 = 43$ より $13x + 43y = 1$ である。13 と 43 にユークリッドの互除法を適用すると，

$$43 = 3 \times 13 + 4$$
$$13 = 3 \times 4 + 1$$

これより，

$$1 = 13 - 3 \times 4 = 13 - 3 \times (43 - 3 \times 13) = 13 \times 10 - 43 \times 3$$

となるので，$x = 10$，$y = -3$ は $13x + 43y = 1$ の整数解の 1 つである。

$13x + 43y = 1$ と $13 \times 10 + 43 \times (-3) = 1$ を辺々引くと，

$$13 \times (x - 10) = -43 \times (y + 3) \quad \cdots (*)$$

を得る。

ここで，13 と 43 は互いに素であるから，$x - 10$ は 43 の倍数である。したがって，整数 k を用いて $x - 10 = 43k$ とかける。これを式 $(*)$ に代入すると，$y + 3 = -13k$ とかける。すなわち，$13x + 43y = 1$ のすべての整数解は

$$x = 43k + 10,\ y = -13k - 3,\ (k \text{ は整数})$$

と表される。

整数解 (x, y) のうち，x の絶対値が 50 に近い k の候補として $k = -2, -1, 0, 1, 2$ が考えられる。それぞれ，

$k = -2$ のとき　$x = 43 \times (-2) + 10 = -76$

$k = -1$ のとき　$x = 43 \times (-1) + 10 = -33$

$k = 0$ のとき　$x = 43 \times 0 + 10 = 10$

$k = 1$ のとき　$x = 43 \times 1 + 10 = 53$

$k = 2$ のとき　$x = 43 \times 2 + 10 = 96$

となることから，$k = 1$ の場合，すなわち $x = 53$ の場合に x の絶対値は 50 に最も近い。以上より，求める答えは

$$x = 43 \times 1 + 10 = 53$$
$$y = -13 \times 1 - 3 = -16$$

である。

(3)

$$3 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{10}{3}$$

を $(*)$ とおく。

(1) より $\dfrac{a_4}{a_3} = \dfrac{13}{4} = 3.25$ なので，$3 < \dfrac{a_4}{a_3} < \dfrac{10}{3} = 3.33\cdots$ となり、$n = 3$ のとき $(*)$ が成り立つ。

$n = k$ $(k \geqq 3)$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する。すなわち，

$$3 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \frac{10}{3} \quad \cdots \ (\star)$$

が成り立つと仮定する。式 $(\star)$ から，$a_k \neq 0$，$a_{k+1} \neq 0$ であることに注意する。

$a_{k+2} = 3a_{k+1} + a_k$ の両辺を a_{k+1} で割ると，

$$\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} = \frac{3a_{k+1} + a_k}{a_{k+1}} = 3 + \frac{a_k}{a_{k+1}} \quad \cdots \ (\sharp)$$

である。また，式 $(\star)$ の逆数をとると，

$$\frac{3}{10} < \frac{a_k}{a_{k+1}} < \frac{1}{3} \quad \cdots \ (\natural)$$

式 $(\sharp)$，$(\natural)$ より，

$$3 + \frac{3}{10} < \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} = 3 + \frac{a_k}{a_{k+1}} < 3 + \frac{1}{3}$$

すなわち，

$$3 < \frac{33}{10} < \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} < \frac{10}{3}$$

である。

よって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成り立つ。

以上より，$(*)$ は 3 以上のすべての自然数 n について成り立つ。

〔 3 〕

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x, y)$ とおくと，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = x^2 + y^2$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \sqrt{3}x + y$ である。これより，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} - 1$ は，

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}x + 2y - 1 \quad \cdots (*)$$

となる。式 $(*)$ を変形すると，C の方程式は，

$$(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 3$$

である。

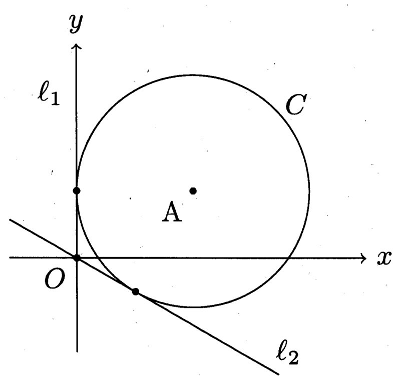
(2) (1) より C は中心座標 $\mathrm{A}(\sqrt{3}, 1)$，半径 $\sqrt{3}$ の円である。したがって，直線 $\ell : ax + by = 0$ と C が共有点を持つための条件は，C の中心 $\mathrm{A}(\sqrt{3}, 1)$ と $\ell : ax + by = 0$ の距離が $\sqrt{3}$ 以下となることである。ℓ は直線であることから $(a, b) \neq (0, 0)$ であることに注意すると，$\mathrm{A}(\sqrt{3}, 1)$ と $\ell : ax + by = 0$ の距離は，

$$\frac{|\sqrt{3}a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

なので，a，b の条件は，

$$\frac{|\sqrt{3}a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leqq \sqrt{3} \ （ただし, (a, b) = (0, 0) \ は除く）$$

(3) ℓ は原点を通る直線なので，ℓ が下図の ℓ_1 もしくは ℓ_2 のとき，ℓ と C の共有点は 1 個である。



(2) より ℓ と C の共有点が 1 個の場合，$\dfrac{|\sqrt{3}a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{3}$ である。$\dfrac{|\sqrt{3}a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow b(b - \sqrt{3}a) = 0$ より，$b = 0$ のとき，もしくは $b \neq 0$ かつ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき ℓ と C の共有点は 1 個となる。

(i) $b = 0$ のとき

このとき，$a \neq 0$ なので $\ell : x = 0$ であり，上図の ℓ_1 である。式 $(*)$ に $x = 0$ を代入すると $y = 1$ を得る。したがって，$\ell : x = 0$ は $(0, 1)$ で C と接する。

(ii) $b \neq 0$ かつ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

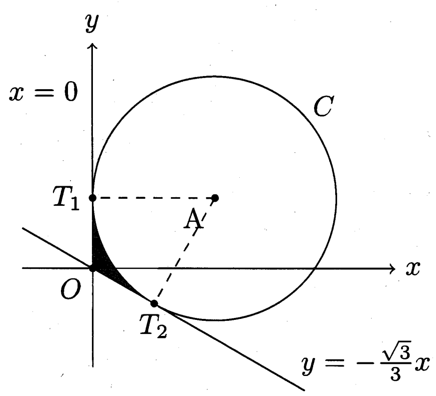
このとき，$\ell : y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ であり，前頁の図の ℓ_2 である。式 $(*)$ に $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ を代入すると，

$$x^2 + \frac{1}{3}x^2 = 2\sqrt{3}x - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 4\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

なので，$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$。したがって，$\ell : y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ のとき，ℓ は C と $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ で接する。

以上より，直線 $x = 0$ は C と $(0, 1)$ で接点を持ち，直線 $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ は C と $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ で接点を持つ。

(4) (3) で求めた接点 $(0, 1)$ を T_1，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ を T_2 とおく。求める図形の面積は，四角形 $\mathrm{OT_1AT_2}$ の面積から，C の半径 $\mathrm{AT_1}$，$\mathrm{AT_2}$ と短い方の弧 $\mathrm{T_1T_2}$ で囲まれた扇形 $\mathrm{AT_1T_2}$ の面積を引いたものである。



直角三角形 $\mathrm{OT_1A}$ と直角三角形 $\mathrm{OT_2A}$ は斜辺 OA を共有し，$\mathrm{AT_1} = \mathrm{AT_2}$ なので合同である。また，直角三角形 $\mathrm{OT_1A}$ の面積は $\dfrac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3}$ である。したがって，四角形 $\mathrm{OT_1AT_2}$ の面積は $2 \times \dfrac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ である。

直角三角形 $\mathrm{OT_1A}$ は三辺の長さが $1 : \sqrt{3} : 2$ なので $\angle \mathrm{OAT_1} = 30°$。したがって，$\angle \mathrm{T_1AT_2} = 60°$ である。これより，扇形 $\mathrm{AT_1T_2}$ の面積は，$\dfrac{\pi\sqrt{3}^2}{6} = \dfrac{\pi}{2}$ となることから，求める面積は，

$$\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$$

である。

〔 4 〕

(1) 関数 $f(x)$ は導関数 $f'(x)$ の符号の変わり目で極値をとるので，$f(x)$ が極値をもつのは $f'(x)$ が正の値も負の値もとるときである。

$f'(x) = 6x^2 + 2kx - 3(k+1)$ より $f'(x)$ は 2 次関数なので，$y = f'(x)$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わればよい。したがって

$$6x^2 + 2kx - 3(k+1) = 0 \qquad \cdots(*)$$

の判別式 D が正になればよい。

$$\frac{D}{4} = k^2 + 18(k+1) = k^2 + 18k + 18 > 0$$

よって，$k < -9 - 3\sqrt{7}$，$-9 + 3\sqrt{7} < k$ である。

(2) α，β は式 $(*)$ の解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{2k}{6},\ \alpha\beta = -\frac{3(k+1)}{6}$$

が成り立つので，

$$k = -3(\alpha+\beta),\quad k+1 = -2\alpha\beta\ \cdots(\star)$$

である。

極大値 $f(\alpha)$ と極小値 $f(\beta)$ の差 $f(\alpha) - f(\beta)$ は

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= (2\alpha^3 + k\alpha^2 - 3(k+1)\alpha - 5) - (2\beta^3 + k\beta^2 - 3(k+1)\beta - 5) \\ &= 2(\alpha^3 - \beta^3) + k(\alpha^2 - \beta^2) - 3(k+1)(\alpha - \beta) \\ &= (\alpha - \beta)\{2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + k(\alpha+\beta) - 3(k+1)\} \end{aligned}$$

となる。上式に式 $(\star)$ を代入すると，

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= (\alpha - \beta)\{2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - 3(\alpha+\beta)^2 + 6\alpha\beta\} \\ &= (\alpha - \beta)(2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 - 3\alpha^2 - 3\beta^2) \\ &= -(\alpha - \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = -(\alpha - \beta)^3 \\ &= (\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

これより，$f(\alpha) - f(\beta) = (\beta - \alpha)^3$ である。

(3) $(\beta - \alpha)^3 = 27$ より $\beta - \alpha = 3$ である。また，式 $(\star)$ より

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{1}{9}k^2 + 2(k+1)$$

となるので，$\frac{1}{9}k^2+2k+2=9$ である。これより，

$$k^2+18k-63=(k-3)(k+21)=0$$

を得る。$k>0$ より $k=3$ となるため，

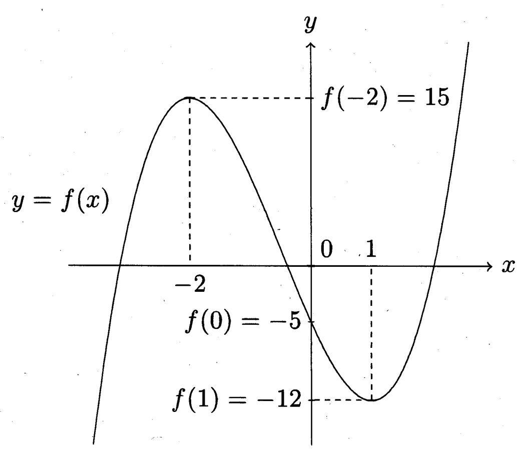
$$f(x)=2x^3+3x^2-12x-5$$

となる。また，$k=3$ より，$\alpha+\beta=-\frac{k}{3}=-1$ と $\beta-\alpha=3$ となることから，$\alpha=-2$，$\beta=1$ である。

与えられた方程式 $f(x)=m$ の実数解は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=m$ の共有点の x 座標に等しい。$f'(x)$ の符号および $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$

増減表と $f(0)=-5$, $f(-2)=2\times(-2)^3+3\times(-2)^2-12\times(-2)-5=-16+12+24-5=15$, $f(1)=2\times1^3+3\times1^2-12\times1-5=2+3-12-5=-12$ より，$y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



これより，$f(x)=m$ が異なる 3 つの実数解をもつのは $f(1)<m<f(-2)$ のときであり，その中で特に正の実数解が 1 つになるのは

$$f(0)\leqq m<f(-2)$$

のときである。
以上より，求める m の範囲は $-5\leqq m<15$ である。