[1] x, y を実数とし，$x^2-xy+y^2=1$ を満たすとする。$t=x+y$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) xy を t を用いて表せ。

(2) t の値の範囲を求めよ。

(3) $2x+3xy+2y$ の最大値および最小値と，そのときの x, y の値を求めよ。

解答例

(1) $x^2-xy+y^2=1$ より $3xy=(x+y)^2-1$ である。ゆえに $xy=\dfrac{t^2-1}{3}$ となる。

(2) $x+y=t,\ xy=\dfrac{t^2-1}{3}$ より，x, y は2次方程式

$$z^2-tz+\frac{t^2-1}{3}=0$$

の解である。この方程式は実数解をもつので，方程式の判別式 D について，

$$D=(-t)^2-4\cdot\frac{t^2-1}{3}=\frac{-t^2+4}{3}\geqq 0$$

すなわち $-2\leqq t\leqq 2$ が成り立つ。これが求める t の範囲である。

(3) $2x+3xy+2y$ を，t を用いて表すと

$$2x+3xy+2y=t^2+2t-1$$

となる。$-2\leqq t\leqq 2$ における $g(t)=t^2+2t-1=(t+1)^2-2$ の最大値および最小値を求めればよい。

まず最小値を求める。$g(t)=(t+1)^2-2$ なので，$t=-1$ のとき最小値 -2 をとる。$t=-1$ に対応する x, y は，

$$z^2-tz+\frac{t^2-1}{3}=z^2+z=z(z+1)=0$$

の解である。したがって，$(x,y)=(0,-1),\ (-1,0)$ である。

次に最大値を求める。$g(-2)$ と $g(2)$ が最大値の候補である。$g(-2)=-1,\ g(2)=7$ なので，$t=2$ のとき最大値 7 をとる。$t=2$ に対応する x, y は，

$$z^2-tz+\frac{t^2-1}{3}=z^2-2z+1=(z-1)^2=0$$

の解である。したがって，$(x,y)=(1,1)$ である。

以上より，$2x+3xy+2y$ は $(x,y)=(1,1)$ のとき最大値 7 をとり，$(x,y)=(0,-1),\ (-1,0)$ のとき最小値 -2 をとる。 □

[2] 四角形 ABCD について，次の問いに答えよ。

(1) 等式

$$|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2+|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+|\overrightarrow{DA}|^2$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 辺 BC と辺 DA が平行で，4 つの辺の長さがそれぞれ $AB=3$, $BC=5$, $CD=4$, $DA=1$ であるとき，AC^2+BD^2 の値を求めよ。

(3) 命題 P および命題 Q をそれぞれ次のように定める。

命題 P「四角形 ABCD において，4 つの辺の長さをそれぞれ 2 乗したものの和と，2 つの対角線の長さをそれぞれ 2 乗したものの和が等しい」

命題 Q「四角形 ABCD は長方形である」

このとき，命題 P は 命題 Q が成り立つための必要条件か，十分条件か，必要十分条件か，あるいはそのいずれでもないかを，理由をつけて答えよ。

解答例

(1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ に注意せよ。このとき，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC}|^2&=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+|\overrightarrow{BC}|^2,\\|\overrightarrow{BD}|^2&=|\overrightarrow{BC}|^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+|\overrightarrow{CD}|^2,\\|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}|^2&=|\overrightarrow{BC}|^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+|\overrightarrow{DA}|^2\end{aligned}$$

が成り立つ。また，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}&=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\\&=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB}=-|\overrightarrow{BC}|^2\end{aligned}$$

である。これらを合わせると

$$|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2+|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+|\overrightarrow{DA}|^2$$

を得る。これで (1) の証明が終わる。

(2) (1) の等式を使う。$\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{DA}$ は平行で逆向きなので，$|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}|=|BC-DA|$ が成り立つ。それゆえ，

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2-(BC-DA)^2=35$$

となる。

(3) はじめに，命題 P が次の命題 R と同値であることを示す。

命題 R「四角形 ABCD は平行四辺形である」

同値性の証明は以下である。(1) より，命題 P が成り立つための必要十分条件は $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=0$，すなわち $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ である。これより，命題 P と命題 R が同値であることがわかる。

必要性を調べる。つまり，命題 Q を真であると仮定し，命題 R の真偽を調べる。長方形は平行四辺形なので，命題 R は真である。よって，命題 R は命題 Q の必要条件である。それゆえ，命題 P は命題 Q の必要条件である。

十分性を調べる。つまり，命題 R を真であると仮定し，命題 Q の真偽を調べる。長方形でない平行四辺形が存在するので，命題 R は偽である。よって，命題 R は命題 Q の十分条件ではない。したがって，命題 P は命題 Q の十分条件ではない。

以上から，命題 P は命題 Q が成り立つための必要条件である。 □

[3] 異なる3つのゲーム A, B, C があり，3つすべて成功すれば賞品がもらえるというアトラクションがある。各ゲームで成功するか失敗するかは独立であり，その成功確率はそれぞれ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}$ である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 各ゲームを1回ずつ行う場合を考える。賞品がもらえる確率を求めよ。

(2) 各ゲームを1回ずつ行う場合を考える。賞品がもらえなかったとき，各ゲームで失敗している確率をそれぞれ求めよ。

(3) A, B, C をこの順で1回ずつ行うこととし，途中で失敗したらそれ以降のゲームは行わない場合を考える。賞品がもらえなかったとき，各ゲームで失敗している確率をそれぞれ求めよ。

解答例

賞品がもらえるという事象を S とし，ゲーム A, B, C で成功するという事象をそれぞれ A, B, C とする。また，余事象をそれぞれ $\bar{S}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ と表す。

(1) $S = A \cap B \cap C$ であり，A, B, C は互いに独立である。したがって，

$$P(S) = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{90}$$

である。

(2) 賞品がもらえなかったときにゲーム A に失敗している確率は，条件つき確率 $P_{\bar{S}}(\bar{A})$ である。ド・モルガンの法則より，

$$\bar{S} = \overline{A \cap (B \cap C)} = \bar{A} \cup \overline{B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$$

なので，$\bar{S} \cap \bar{A} = \bar{A}$ である。このことを踏まえると，

$$P_{\bar{S}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{S} \cap \bar{A})}{P(\bar{S})} = \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{S})} = \frac{1 - P(A)}{1 - P(S)} = \frac{60}{89}$$

である。

賞品がもらえなかったときにゲーム B に失敗している確率は，同様に考えれば，

$$P_{\bar{S}}(\bar{B}) = \frac{P(\bar{S} \cap \bar{B})}{P(\bar{S})} = \frac{P(\bar{B})}{P(\bar{S})} = \frac{60}{89}$$

を得る。

ゲーム C については，

$$P_{\bar{S}}(\bar{C}) = \frac{P(\bar{S} \cap \bar{C})}{P(\bar{S})} = \frac{P(\bar{C})}{P(\bar{S})} = \frac{81}{89}$$

である。

(3) 賞品がもらえなかったときにゲーム A に失敗している確率 $P_{\bar{S}}(\bar{A})$ は，(2) と同様の方法で求めることができ，$P_{\bar{S}}(\bar{A}) = \frac{60}{89}$ である。

賞品がもらえなかったときにゲーム B に失敗している確率を求める。B に失敗するには A に成功していなければならない。したがって，求める確率は $P_{\bar{S}}(A \cap \bar{B})$ である。A と $\bar{B}$ は独立なので，

$$P_{\bar{S}}(A \cap \bar{B}) = \frac{P(\bar{S} \cap (A \cap \bar{B}))}{P(\bar{S})} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{S})} = \frac{P(A)P(\bar{B})}{P(\bar{S})} = \frac{P(A)(1 - P(B))}{1 - P(S)} = \frac{20}{89}$$

を得る。

ゲーム C については，A, B, $\bar{C}$ は互いに独立なので，

$$P_{\bar{S}}(A \cap B \cap \bar{C}) = \frac{P(\bar{S} \cap (A \cap B \cap \bar{C}))}{P(\bar{S})} = \frac{P(A \cap B \cap \bar{C})}{P(\bar{S})} = \frac{P(A)P(B)P(\bar{C})}{P(\bar{S})} = \frac{9}{89}$$

である。□

[4] $0 \leqq x \leqq 6$ のとき，関数 $f(x)$ を $f(x) = x + 2|x-3| - 6$ と定め，関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \left|\int_0^x f(t)dt\right| + \left|\int_x^6 f(t)dt\right|$$

と定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $g(3)$ および $g(6)$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $g(x)$ を求めよ。

(3) 曲線 $y = g(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答例

(1)

$$f(x) = \begin{cases} -x & (0 \leqq x \leqq 3), \\ 3x - 12 & (3 \leqq x \leqq 6) \end{cases}$$

に注意せよ。

はじめに

$$g(3) = \left|\int_0^3 f(t)dt\right| + \left|\int_3^6 f(t)dt\right|$$

を計算する。それぞれ

$$\left|\int_0^3 f(t)dt\right| = \left|\int_0^3 (-t)dt\right| = \left|\left[-\frac{1}{2}t^2\right]_0^3\right| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2},$$
$$\left|\int_3^6 f(t)dt\right| = \left|\int_3^6 (3t-12)dt\right| = \left|\left[\frac{3}{2}t^2 - 12t\right]_3^6\right| = \left|\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}$$

なので，$g(3) = 9$ である。

次に

$$g(6) = \left|\int_0^6 f(t)dt\right| + \left|\int_6^6 f(t)dt\right|$$

を求める。それぞれ

$$\begin{aligned} \left|\int_0^6 f(t)dt\right| &= \left|\int_0^3 (-t)dt + \int_3^6 (3t-12)dt\right| \\ &= \left|\left[-\frac{1}{2}t^2\right]_0^3 + \left[\frac{3}{2}t^2 - 12t\right]_3^6\right| = \left|-\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\right| = 0, \end{aligned}$$
$$\left|\int_6^6 f(t)dt\right| = 0$$

なので，$g(6) = 0$ を得る。

(2) $0 \leqq x \leqq 3$ の場合と，$3 \leqq x \leqq 6$ の場合とに分けて考える。

はじめに $0 \leqq x \leqq 3$ と仮定する。このとき，

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right| = \left|\int_0^x (-t)dt\right| = \left|-\frac{1}{2}x^2\right| = \frac{1}{2}x^2,$$

$$\begin{aligned}\left|\int_x^6 f(t)dt\right| &= \left|\int_x^3 (-t)dt + \int_3^6 (3t-12)dt\right| \\ &= \left|\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}\right) + \frac{9}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}x^2\right| = \frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

なので，$g(x) = x^2$ となる。

次に $3 \leqq x \leqq 6$ と仮定する。このとき，

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)dt\right| &= \left|\int_0^3 (-t)dt + \int_3^x (3t-12)dt\right| \\ &= \left|-\frac{9}{2} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 12x + \frac{45}{2}\right)\right| = \frac{3}{2}\left|x^2 - 8x + 12\right|, \\ \left|\int_x^6 f(t)dt\right| &= \left|\int_x^6 (3t-12)dt\right| = \frac{3}{2}\left|-x^2 + 8x - 12\right| = \frac{3}{2}\left|x^2 - 8x + 12\right|\end{aligned}$$

である。$x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6)$ なので，$3 \leqq x \leqq 6$ のとき，$x^2 - 8x + 12 \leqq 0$ となる。したがって，$g(x) = -3(x^2 - 8x + 12)$ を得る。

以上から，$g(x)$ は

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & (0 \leqq x \leqq 3), \\ -3(x^2 - 8x + 12) & (3 \leqq x \leqq 6) \end{cases}$$

である。

(3) $g(x) \geqq 0$ であることに注意すると，(2) より，

$$\begin{aligned}\int_0^6 g(x)dx &= \int_0^3 x^2 dx - 3\int_3^6 (x^2 - 8x + 12)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 - 3\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x\right]_3^6 = 9 + 27 = 36\end{aligned}$$

である。 □