令 和 4 年 度

入学者選抜学力試験問題

数　　学（後期）

〔注　　意〕

1. 監督者の指示があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. この冊子の問題は 2 ページからなる。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば監督者に申し出て，問題冊子の交換を受けること。
3. 監督者の指示に従って，解答用紙（4 枚）すべてに受験番号および氏名を必ず記入すること。
4. 解答は，必ず解答用紙（4 枚）の指定された枠内に記入すること。書ききれない場合は解答用紙の裏面の指定された枠内に記入すること。
5. この問題冊子は持ち帰ること。

〔1〕 $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin x - \cos x + \sin 2x + 2$$

と定める。$t = \sin x - \cos x$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を t を用いて表せ。

(2) t の値の範囲を求めよ。

(3) k を定数とする。方程式 $f(x) = k$ が異なる2つの実数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(4) $f(x)$ が最大値をとる x の値を a とおくとき，$\sin a$ の値を求めよ。

〔2〕 t を定数とする。3点P，Q，R を

$$\mathrm{P}(-t^2 + 2t,\ 2t^2 + t),$$

$$\mathrm{Q}(t + 2,\ 3t - 4),$$

$$\mathrm{R}(-t^2 + 3t + 1 + 2\sqrt{3},\ 2t^2 - t - 2 + \sqrt{3})$$

とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

(2) R は直線 PQ 上にないことを示せ。

(3) $\angle\mathrm{RPQ}$ が鋭角となる t の値の範囲を求めよ。

(4) $\triangle\mathrm{PQR}$ が鋭角三角形となる t の値の範囲を求めよ。

〔３〕 １枚のコインを投げる試行を繰り返し，n 回目の試行において，表が出たとき $a_n = 1$，裏が出たとき $a_n = 0$ とする。a_1，a_2，……，a_{n-1}，a_n から得られる整数 M_n を

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} a_k$$
$$= 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} a_2 + \cdots\cdots + 2^1 a_{n-1} + 2^0 a_n$$

と定める。M_n を３で割った余りが１である確率を P_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1) M_1，M_2，M_3 のとり得る値をそれぞれすべて求めよ。

(2) P_1，P_2，P_3 をそれぞれ求めよ。

(3) M_n が３の倍数であるとき，M_{n+1} を３で割った余りが１になる確率を求めよ。

(4) P_n を n を用いて表せ。

〔４〕 a を定数とする。整式 $f(x)$ が

$$f(x) = a\int_0^1 xtf(t)\,dt + \int_0^x (x-t)\,dt + \int_x^1 (t-x)\,dt$$

を満たしている。$b = \int_0^1 tf(t)\,dt$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\int_0^x (x-t)\,dt + \int_x^1 (t-x)\,dt$ を求めよ。

(2) b を a を用いて表せ。

(3) $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ のとき，a の値および $f(x)$ を求めよ。