令和４年度　入学者選抜学力試験　数学（後期／経済）　解答例

〔1〕

(1) $t=\sin x-\cos x$ とおくとき，

$$\begin{aligned} t^2 &= (\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x \\ &= 1-2\sin x\cos x \\ &= 1-\sin 2x \end{aligned}$$

したがって，$\sin 2x=1-t^2$

これより，

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x-\cos x+\sin 2x+2 \\ &= t+(1-t^2)+2 \\ &= -t^2+t+3 \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{f(x)=-t^2+t+3}$

(2) 三角関数の合成を用いると，$\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ から

$$\begin{aligned} t &= \sin x-\cos x \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\sin x\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos x\right) \\ &= \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ のとき

$$0-\frac{\pi}{4}\leqq x-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}\leqq x-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5\pi}{12}$$

であるから，x の値が増加すると t の値も増加する。

t の最小値は $x=0$ のときで，$t=\sin 0-\cos 0=-1$

t の最大値は $x=\dfrac{2\pi}{3}$ のときで，$t=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

よって，t の値の範囲は $\boldsymbol{-1\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}}$

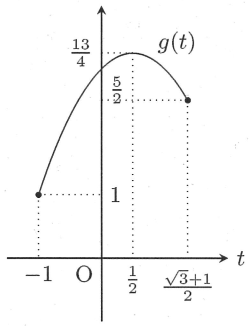
(3) (1) で求めた $f(x)=-t^2+t+3=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{13}{4}$ を $g(t)$ とおくと，

$g(-1)=-\left(-1-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{13}{4}=-\dfrac{9}{4}+\dfrac{13}{4}=1$

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{13}{4}$

$g\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)=-\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{13}{4}=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{13}{4}=\dfrac{5}{2}$

より，$g(t)$ のグラフは次のようになる。



(2) で示したように，x の値が増加すると t の値も増加する。よって, t を 1 つ定めると，それに対応する x が 1 つ定まるので，$g(t)=k$ の解の個数と $f(x)=k$ の解の個数は一致する。したがって，求める k の値の範囲は，$g(t)=k$ の解の個数が 2 個となる k の範囲である。上のグラフよりそのような k の範囲は,

$$\boldsymbol{\frac{5}{2} \leqq k < \frac{13}{4}}$$

(4) (2) の解答の $g(t)$ のグラフから，$t=\dfrac{1}{2}$ のときに $g(t)$ は最大値 $\dfrac{13}{4}$ をとる。 したがって,

$$\frac{1}{2}=\sin a-\cos a$$

である。$\sin^2 a+\cos^2 a=1$ に代入して

$$\sin^2 a+\cos^2 a=\sin^2 a+\left(\sin a-\frac{1}{2}\right)^2=2\sin^2 a-\sin a+\frac{1}{4}=1$$

$$2\sin^2 a-\sin a-\frac{3}{4}=0$$

$$\sin a=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2+4\times2\times\frac{3}{4}}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{4}$$

$0\leqq a\leqq\frac{2\pi}{3}$ では $\sin a\geqq 0$ であるから,

$$\boldsymbol{\sin a=\frac{1+\sqrt{7}}{4}}$$

〔2〕

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (t+2,\, 3t-4) - (-t^2+2t,\, 2t^2+t) = (t^2-t+2)(1,-2)$

$t^2-t+2 = \left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} > 0$ が成り立つから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は $(1,-2)$ と同じ向きを持つ。したがって，$(1,-2)$ と同じ向きを持つ単位ベクトルを求めればよい。以上から，求める単位ベクトルは

$$\frac{(1,-2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \left(\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}, \boldsymbol{-\frac{2}{\sqrt{5}}}\right)$$

(2) (1) より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は $(1,-2)$ と平行である。一方，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= (-t^2+3t+1+2\sqrt{3},\, 2t^2-t-2+\sqrt{3}) - (-t^2+2t,\, 2t^2+t)\\ &= (t+1+2\sqrt{3}, -2t-2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

であることから，$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = k(1,-2)$ を満たす実数 k が存在すると仮定すると

$$-2(t+1+2\sqrt{3}) = -2t-2+\sqrt{3}$$

より，$5\sqrt{3}=0$ が成り立つことになり矛盾する。よって，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ は $(1,-2)$ と平行ではないので，R は直線 PQ 上にない。

(3) (1)，(2) より，P, Q, R は t の値によらず互いに異なる点となり，$\angle\mathrm{RPQ}(\neq 0^\circ)$ は常に定まる。したがって，$\angle\mathrm{RPQ}$ が鋭角となるための必要十分条件は，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} > 0$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (t^2-t+2)\{1\cdot(t+1+2\sqrt{3}) - 2\cdot(-2t-2+\sqrt{3})\} = 5(t^2-t+2)(t+1)$$

よって，$t^2-t+2>0$ であったから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}>0$ は $t+1>0$ と同値である。以上から，求める t の値の範囲は $\boldsymbol{t > -1}$

(4) 3 点 P, Q, R が t の値によらず異なることから，$\angle\mathrm{RPQ}$, $\angle\mathrm{PQR}$, $\angle\mathrm{QRP}$ がすべて鋭角となるような t の値の範囲を求めればよい。

(i) $\angle\mathrm{RPQ}$ が鋭角となる t の値の範囲は, (3) より $t>-1$

(ii) $\angle\mathrm{PQR}$ が鋭角となるための必要十分条件は，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}>0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QR}} &= (-t^2+3t+1+2\sqrt{3},\, 2t^2-t-2+\sqrt{3}) - (t+2,\, 3t-4)\\ &= (-t^2+2t-1+2\sqrt{3},\, 2t^2-4t+2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = -\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}} &= -(t^2-t+2)\{1\cdot(-t^2+2t-1+2\sqrt{3}) - 2\cdot(2t^2-4t+2+\sqrt{3})\}\\ &= -(t^2-t+2)(-5t^2+10t-5)\\ &= 5(t^2-t+2)(t-1)^2\end{aligned}$$

よって，$t^2-t+2>0$ であったから，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}>0$ は $(t-1)^2>0$ と同値である。以上から，求める t の値の範囲は $t\neq 1$

(iii) $\angle\mathrm{QRP}$ が鋭角となるための必要十分条件は，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RP}} = \overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} > 0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= (-t^2+2t-1+2\sqrt{3})\cdot(t+1+2\sqrt{3}) + (2t^2-4t+2+\sqrt{3})\cdot(-2t-2+\sqrt{3})\\ &= -t^3+(1-2\sqrt{3})t^2+(1+6\sqrt{3})t+11-4t^3+(4+2\sqrt{3})t^2+(4-6\sqrt{3})t-1\\ &= -5(t^3-t^2-t-2)\\ &= -5(t-2)(t^2+t+1)\\ &= -5(t-2)\left\{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}\end{aligned}$$

であり，特に $t^2+t+1>0$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}>0$ は $t-2<0$ と同値。以上から，求める t の値の範囲は $t<2$
(i)，(ii)，(iii) より，求める t の値の範囲は $\boldsymbol{-1<t<1}$ **または** $\boldsymbol{1<t<2}$

〔3〕

(1) $a_n \in \{0,1\}$ である。

(i) $M_1 = 2^0 a_1 = a_1$ より，$\boldsymbol{M_1}$ **のとり得る値は 0，1**

(ii) $M_2 = 2^1 a_1 + 2^0 a_2 = 2a_1 + a_2$

$2a_1$ は 0 か 2 であるから，$\boldsymbol{M_2}$ **のとり得る値は 0，1，2，3**

(iii) $M_3 = 2^2 a_1 + 2^1 a_2 + 2^0 a_3 = 4a_1 + 2a_2 + a_3$

$4a_1$ は 0 か 4 であるから，$\boldsymbol{M_3}$ **のとり得る値は 0，1，2，3，4，5，6，7**

(2) (i) $n = 1$ の場合，M_1 を 3 で割った余りが 1 になるのは，

$a_1 = 1$ のとき $M_1 = 1$

の 1 通りであるから，$\boldsymbol{P_1 = \frac{1}{2}}$

(ii) $n = 2$ の場合，M_2 を 3 で割った余りが 1 になるのは，

$(a_1, a_2) = (0, 1)$ のとき $M_2 = 1$

の 1 通りであるから，$\boldsymbol{P_2} = \dfrac{1}{2 \times 2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(iii) $n = 3$ の場合，M_3 を 3 で割った余りが 1 になるのは，

$(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 1)$ のとき $M_3 = 1$

$(a_1, a_2, a_3) = (1, 0, 0)$ のとき $M_3 = 4$

$(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 1)$ のとき $M_3 = 7$

の 3 通りであるから，$\boldsymbol{P_3} = \dfrac{3}{2 \times 2 \times 2} = \boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

(3) M_{n+1} と M_n について

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= 2^n a_1 + 2^{n-1} a_2 + \cdots\cdots + 2^1 a_n + 2^0 a_{n+1} \\ &= 2\left(2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} a_2 + \cdots\cdots + 2^1 a_{n-1} + 2^0 a_n\right) + 2^0 a_{n+1} \\ &= 2M_n + a_{n+1} \end{aligned}$$

が成り立つ。M_n が 3 の倍数のとき，k を整数として $M_n = 3k$ とおくことができるので

$a_{n+1} = 0$ のとき $M_{n+1} = 2(3k) = 3(2k)$ より，M_{n+1} は 3 の倍数。

$a_{n+1} = 1$ のとき $M_{n+1} = 2(3k) + 1 = 3(2k) + 1$ より，M_{n+1} を 3 で割った余りは 1 になる。

したがって，求める確率は a_{n+1} が 1 となる確率であるから $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(4) M_n を 3 で割った余りは 0，1，2 のいずれかである。

(i) M_n を 3 で割った余りが 0 のとき

(3) よりこの条件の下で M_{n+1} を 3 で割った余りが 1 になる確率は $\dfrac{1}{2}$ である。

(ii) M_n を 3 で割った余りが 1 のとき

k を整数として $M_n = 3k + 1$ とおくことができる。

$a_{n+1} = 0$ のとき $M_{n+1} = 2(3k+1) = 3(2k) + 2$ より，M_{n+1} を 3 で割った余りは 2 になる。

$a_{n+1} = 1$ のとき $M_{n+1} = 2(3k+1) + 1 = 3(2k+1)$ より，M_{n+1} を 3 で割った余りは 0 になる。

したがって，この条件の下で M_{n+1} を 3 で割った余りが 1 になる確率は 0 である。

(iii) M_n を 3 で割った余りが 2 のとき

k を整数として $M_n = 3k+2$ とおくことができる。

$a_{n+1} = 0$ のとき $M_{n+1} = 2(3k+2) = 3(2k+1)+1$ より，M_{n+1} を 3 で割った余りは 1 になる。

$a_{n+1} = 1$ のとき $M_{n+1} = 2(3k+2)+1 = 3(2k+1)+2$ より，M_{n+1} を 3 で割った余りは 2 になる。

したがって，この条件の下で M_{n+1} を 3 で割った余りが 1 になる確率は $\dfrac{1}{2}$ である。

M_n を 3 で割った余りが 0 である確率を Q_n とすると，上記 (i)(ii)(iii) より，

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{1}{2}Q_n + 0\cdot P_n + \frac{1}{2}(1-P_n-Q_n) \\ &= -\frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

P_{n+1}，P_n をともに α でおきかえた等式 $\alpha = -\dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{2}$ を辺々引くと，

$$P_{n+1} - \alpha = -\frac{1}{2}(P_n - \alpha)$$

を得る。等式 $\alpha = -\dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{2}$ より $\alpha = \dfrac{1}{3}$ が成り立つので，上記の漸化式は，

$$P_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_n - \frac{1}{3}\right)$$

と変形できる。数列 $\left\{P_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $P_1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$P_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

すなわち

$$\boldsymbol{P_n = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}}$$

〔4〕

(1)

$$\int_0^x (x-t)dt + \int_x^1 (t-x)dt = \left[xt - \frac{1}{2}t^2\right]_0^x + \left[\frac{1}{2}t^2 - xt\right]_x^1$$
$$= x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2$$
$$= \boldsymbol{x^2 - x + \frac{1}{2}}$$

(2) $b = \displaystyle\int_0^1 tf(t)dt$ とおくとき，

$$\int_0^1 xtf(t)dt = x\int_0^1 tf(t)dt = xb$$

これと (1) より，

$$\begin{aligned} f(x) &= a\int_0^1 xtf(t)dt + \int_0^x (x-t)dt + \int_x^1 (t-x)dt \\ &= abx + x^2 - x + \frac{1}{2} \\ &= x^2 + (ab-1)x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} b &= \int_0^1 tf(t)dt \\ &= \int_0^1 \left(t^3 + (ab-1)t^2 + \frac{1}{2}t\right)dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{ab-1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^2\right]_0^1 \\ &= \frac{ab-1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{ab}{3} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

よって，

$$b - \frac{ab}{3} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow (6-2a)b = 1$$

$6-2a \neq 0$ であるから，$\boldsymbol{b = \dfrac{1}{6-2a}}$

(3) (2) より，

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + (ab-1)x + \frac{1}{2} \\ &= x^2 + \left(\frac{a}{6-2a} - 1\right)x + \frac{1}{2} \\ &= x^2 - \frac{6-3a}{6-2a}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{6-3a}{6-2a}x + \frac{1}{2}\right)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{6-3a}{2(6-2a)}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_0^1 \\ &= \frac{5}{6} - \frac{6-3a}{2(6-2a)} \\ &= 1\end{aligned}$$

これより，

$$\frac{3a-6}{6-2a} = \frac{1}{3}$$

であるから

$$\boldsymbol{f(x)} = x^2 - \frac{6-3a}{6-2a}x + \frac{1}{2} \boldsymbol{= x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}}$$

また，

$$3(3a-6) = 6-2a$$

よって，$\boldsymbol{a = \frac{24}{11}}$