令和3年度 入学者選抜学力試験 数学（前期／DS） 解答例

〔1〕

(1) $x-1<x<x+1$ であるから $x+1$ が最大であり，三角形の成立条件により，

$x+1<(x-1)+x \Longleftrightarrow x>2$

よって，$\boldsymbol{2<x}$

(2) 余弦定理より，

$$\cos A=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}}=\frac{x^2+(x-1)^2-(x+1)^2}{2x(x-1)}=\frac{x-4}{2(x-1)}$$

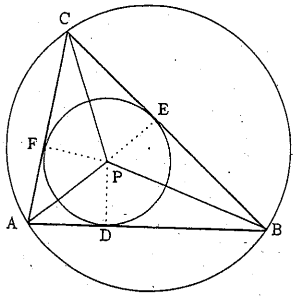
$0°<A<180°$ より，$\sin A>0$ であることに注意し，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ を用いると，

$$\sin A=\sqrt{1-\left\{\frac{x-4}{2(x-1)}\right\}^2}=\sqrt{\frac{4(x-1)^2-(x-4)^2}{4(x-1)^2}}=\frac{\sqrt{3(x^2-4)}}{2(x-1)}$$

したがって，外接円 O_1 の半径を R とすると，正弦定理から

$$2R=\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\frac{x+1}{\frac{\sqrt{3(x^2-4)}}{2(x-1)}}=\frac{2(x^2-1)}{\sqrt{3(x^2-4)}}.$$

よって，$R=\boldsymbol{\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3(x^2-4)}}}$



(3) $\triangle$ABC の面積 S を x を用いて表すと，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}\sin A=\frac{1}{2}x\cdot(x-1)\cdot\frac{\sqrt{3(x^2-4)}}{2(x-1)}=\frac{x\sqrt{3(x^2-4)}}{4}$$

一方，内接円の中心をPとし，$\triangle$ABC を3つの三角形 $\triangle$PAB, $\triangle$PBC, $\triangle$PCA に分けると，$\triangle$ABC の面積 S は内接円の半径 r により，次のように表される。

$$S=\frac{xr}{2}+\frac{(x-1)r}{2}+\frac{(x+1)r}{2}=\frac{3xr}{2}$$

したがって，

$$\frac{3xr}{2}=\frac{x\sqrt{3(x^2-4)}}{4}$$

が成り立ち，これを r について解くと，

$r=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3(x^2-4)}}{6}}$

(4) $\triangle$ABC とその内接円 O_2 について，辺 AB，BC，CA との接点をそれぞれ D，E，F とする。このとき，$\angle\mathrm{DPF} = 180^\circ - \angle A$ より，

$$\sin\angle\mathrm{DPF} = \sin(180^\circ - A) = \sin A = \frac{x+1}{2R}$$

同様に，

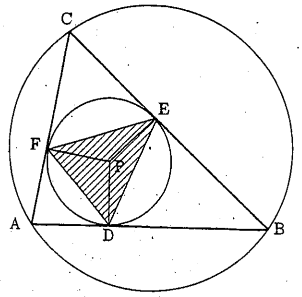
$$\sin\angle\mathrm{DPE} = \sin B = \frac{x-1}{2R}, \qquad \sin\angle\mathrm{EPF} = \sin C = \frac{x}{2R}$$

よって，$\triangle$DEF の面積 S_3 は，

$$S_3 = \frac{1}{2}r^2\sin\angle\mathrm{DPF} + \frac{1}{2}r^2\sin\angle\mathrm{DPE} + \frac{1}{2}r^2\sin\angle\mathrm{EPF} = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{x+1}{2R} + \frac{x-1}{2R} + \frac{x}{2R}\right) = \frac{3xr^2}{4R}$$

よって，(2) より $R = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{3(x^2-4)}}$，(3) より $r^2 = \dfrac{x^2-4}{12}$ であったから，

$$S_3 = \frac{3x}{4}\cdot\frac{x^2-4}{12}\cdot\frac{\sqrt{3(x^2-4)}}{x^2-1} = \boldsymbol{\frac{x\sqrt{3(x^2-4)^3}}{16(x^2-1)}}$$



〔2〕

(1) $a_1 = 43$，$a_2 = 43 \times 47 = 2021$，$a_3 = 43 \times 47^2 = 94987$ なので，
$\boldsymbol{b_2 = 4}$，$\boldsymbol{b_3 = 5}$

(2) 定義より $b_n = d(a_n)$，すなわち b_n は a_n の桁数であるから，

$$10^{b_n - 1} \leqq a_n < 10^{b_n} \iff b_n - 1 \leqq \log_{10} a_n < b_n$$

$b_n = n$ と仮定する。$a = r = 9$ なので，$a_n = 9 \cdot 9^{n-1} = 9^n$（$n = 1$ のときも $a_1 = 9 = 9^1$ となり成り立つ）であり，

$$10^{n-1} \leqq 9^n < 10^n$$

である。第二不等式は，任意の n に対して成り立つ。第一不等式で常用対数をとると

$$n - 1 \leqq n \log_{10} 3^2 = 2n \log_{10} 3$$

となる。n について整理すると

$$n \leqq \frac{1}{1 - 2\log_{10} 3} = \frac{1}{1 - 2 \times 0.4771} = \frac{1}{1 - 0.9542} = \frac{10000}{458} = 21\frac{382}{458}$$

を得る。それゆえ $\boldsymbol{n = 21}$

(3) $a = 1$ なので，$a_n = r^{n-1}$ である。

$\{b_n\}$ を等差数列と仮定する。$b_1 = 1$，$b_2 = d(r)$ なので，公差は $d(r) - 1$ で，一般項は $b_n = 1 + (d(r) - 1)(n - 1)$ である。よって，

$$10^{(d(r)-1)(n-1)} \leqq r^{n-1} < 10^{1+(d(r)-1)(n-1)}$$

すなわち

$$1 \leqq \left(\frac{r}{10^{d(r)-1}}\right)^{n-1} < 10$$

を得る。$d(r)$ の定義より $10^{d(r)-1} \leqq r$ すなわち $1 \leqq \dfrac{r}{10^{d(r)-1}}$ なので，第一不等式は任意の n に対して成り立つ。

第二不等式が任意の n に対して成り立つような r の条件を求める。$1 < \dfrac{r}{10^{d(r)-1}}$ の場合，$t = \dfrac{r}{10^{d(r)-1}}$ と表したとき，$n \geqq \log_t 10 + 1$ となる n に対しては

$$t^{n-1} \geqq t^{\log_t 10} = 10$$

となるので，第二不等式は成り立たない。一方，$1 = \dfrac{r}{10^{d(r)-1}}$ を満たすような r，すなわち $r = 10^{d(r)-1}$ に対しては，第二不等式は任意の n に対して成り立つ。

逆に，ある自然数 m に対して $r = 10^m$（$d(r) = m + 1$）のとき，

$$b_n = d(a_n) = d(10^{m(n-1)}) = m(n-1) + 1$$

であるから，$\{b_n\}$ は公差 m の等差数列である。

以上から，$\{b_n\}$ が等差数列となるための必要十分条件は，公比 r が $r = 10^{d(r)-1}$ を満たすことである。$1 < r < 500$ という条件より，$\boldsymbol{r = 10, 100}$

〔3〕-〔A〕

さいころを4個投げたときの目の出方は 6^4 通りあり，これらは同様に確からしい。

(1) 1の目または6の目が少なくとも1つ出るという事象は，4つとも 2,3,4,5 のいずれかの目が出るという事象の余事象である。よって，

$$1-\left(\frac{4}{6}\right)^4=1-\left(\frac{2}{3}\right)^4=1-\frac{16}{81}=\boldsymbol{\frac{65}{81}}$$

(2) さいころを4個投げたとき6の目が1つも出ない目の出方は 5^4 通りあり，その内1の目も6の目も1つも出ない目の出方は 4^4 通りあるから

$$\frac{5^4-4^4}{6^4}=\frac{625-256}{1296}=\frac{369}{1296}=\boldsymbol{\frac{41}{144}}$$

(3) (1) の事象を A, (2) の事象を B,「6の目が少なくとも1つは出るが，1の目は1つも出ない」という事象を C,「1と6の両方の目が少なくとも1つ出る」という事象を D とすると，B, C, D は互いに排反な事象で，A はこれら3つの事象の和事象であるから，求める確率 $P(D)$ は $P(A)-(P(B)+P(C))$ となる。

$P(C)$ は，(2) と同様にして求めることができ，$P(C)=P(B)=\dfrac{41}{144}$

(1) より，$P(A)=\dfrac{65}{81}$ であるから，求める確率は，

$$P(D)=P(A)-(P(B)+P(C))=\frac{65}{81}-2\times\frac{41}{144}=\frac{65}{81}-\frac{41}{72}=\frac{520-369}{648}=\boldsymbol{\frac{151}{648}}$$

〔3〕-〔B〕

(1) 余事象の確率から，

$$\begin{aligned} P(|Z| \geqq a) &= 1 - P(|Z| < a) \\ &= 1 - P(-a < Z < a) \\ &= 1 - 2P(0 \leqq Z < a) \\ &= 2\{0.5 - P(0 \leqq Z < a)\} \\ &= 2\{P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z < a)\} \\ &= 2P(Z \geqq a) \end{aligned}$$

(2) $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので，

$$\begin{aligned} P\left(|X-m| \geqq \frac{\sigma}{4}\right) &= P\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right| \geqq \frac{1}{4}\right) \\ &= P\left(|Z| \geqq 0.25\right) \\ &= 2P(Z \geqq 0.25) \\ &= 2(0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 0.25)) \\ &= 2(0.5 - 0.0987) \\ &= 0.8026 \\ &\fallingdotseq \mathbf{0.803} \end{aligned}$$

(3) 母集団分布が正規分布であるから，すべての n に対して，標本平均 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。よって，$Z = \dfrac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので，

$$\begin{aligned} P\left(|\overline{X}-m| \geqq \frac{\sigma}{4}\right) &= P\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geqq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) \\ &= P\left(|Z| \geqq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) \\ &= 2P\left(Z \geqq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) \end{aligned}$$

つまり，

$$2P\left(Z \geqq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) \leqq 0.02 \iff P\left(Z \geqq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) \leqq 0.01 \qquad \text{(A)}$$

を満たす最小の n を求めればよい。正規分布表より，$P(Z \geqq 2.33) = 0.0099$ であるから，

$$\frac{\sqrt{n}}{4} \geqq 2.33 \iff n \geqq 86.8624$$

のとき，条件 (A) が満たされる。一方で，$P(Z \geqq 2.32) = 0.0102$ であるから，

$$\frac{\sqrt{n}}{4} \leqq 2.32 \iff n \leqq 86.1184$$

のとき，条件 (A) は満たされない。したがって，条件を満たす最小の n は $\boldsymbol{n = 87}$.

〔4〕 - 〔C〕

(1) C と ℓ との交点の x 座標は

$$x(x^2-4x+4)=ax$$

すなわち

$$x\{x^2-4x+(4-a)\}=0$$

の実数解である。1つは $x=0$ であり，C と ℓ は異なる3点で交わることから $x^2-4x+(4-a)=0$ の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=4-(4-a)=a>0$

そして，2つの解は $x=2\pm\sqrt{a}$ であり，いずれも正であるから $0<2-\sqrt{a}$ すなわち $\sqrt{a}<2$

よって，$\boldsymbol{0<a<4}$

(2) (1) で求めた交点の x 座標のうち，0以外の2つについて，$\alpha=2-\sqrt{a}$，$\beta=2+\sqrt{a}$ とおく。$0<\alpha<\beta$ であるから

$$f(x)=x(x-2)^2-ax=x(x-\alpha)(x-\beta)$$

と表すと，$0\leqq x\leqq\alpha$ の範囲で $f(x)\geqq 0$，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ の範囲で $f(x)\leqq 0$ である。C と ℓ とで囲まれる2つの図形の面積を S，T で表し，

$$S=\int_0^\alpha\left\{x^3-4x^2+(4-a)x\right\}dx,\qquad T=\int_\alpha^\beta\left\{-x^3+4x^2-(4-a)x\right\}dx$$

を考える。

$$S=\int_0^\alpha\left\{x^3-4x^2+(4-a)x\right\}dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{4-a}{2}x^2\right]_0^\alpha=\frac{1}{4}\alpha^4-\frac{4}{3}\alpha^3+\frac{4-a}{2}\alpha^2$$

$$\begin{aligned}
T &= \int_\alpha^\beta\left\{-x^3+4x^2-(4-a)x\right\}dx\\
&= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{4-a}{2}x^2\right]_\alpha^\beta\\
&= \left(-\frac{1}{4}\beta^4+\frac{4}{3}\beta^3-\frac{4-a}{2}\beta^2\right)-\left(-\frac{1}{4}\alpha^4+\frac{4}{3}\alpha^3-\frac{4-a}{2}\alpha^2\right)\\
&= \left(-\frac{1}{4}\beta^4+\frac{4}{3}\beta^3-\frac{4-a}{2}\beta^2\right)+S
\end{aligned}$$

なので，$S=T$ のとき

$$\frac{1}{4}\beta^4-\frac{4}{3}\beta^3+\frac{4-a}{2}\beta^2=\frac{\beta^2}{12}\left\{3\beta^2-16\beta+6(4-a)\right\}=0$$

すなわち

$$3\beta^2-16\beta+6(4-a)=0$$

を解けばよい。$\beta=2+\sqrt{a}$ なので

$$\begin{aligned}
3\beta^2-16\beta+6(4-a) &= 3(4+4\sqrt{a}+a)-32-16\sqrt{a}+24-6a\\
&= -(3a+4\sqrt{a}-4)\\
&= -(3\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)\\
&= 0
\end{aligned}$$

$\sqrt{a}\geqq 0$ より，適するのは $\sqrt{a}=\dfrac{2}{3}$ であり，(1) で求めた範囲の条件も満たす。

よって，$\boldsymbol{a=\dfrac{4}{9}}$

〔4〕-〔D〕

真数は正であるから，この関数 $f(x)$ の定義域は $x < t+\dfrac{1}{2t}$ である。

(1) $f(x)$ を x で微分すると，

$$f'(x) = \frac{1}{4t} - \frac{1}{4\left(t+\frac{1}{2t}-x\right)}$$

となる。したがって，極値は

$$\frac{1}{4t} - \frac{1}{4\left(t+\frac{1}{2t}-x\right)} = 0$$
$$\frac{1}{4t} = \frac{1}{4\left(t+\frac{1}{2t}-x\right)}$$
$$t = t+\frac{1}{2t}-x$$
$$x = \frac{1}{2t}$$

である。このとき，

$$f(x) = \frac{1}{4t}x + \frac{1}{4}\log\left(t+\frac{1}{2t}-x\right) = \frac{1}{8t^2} + \frac{1}{4}\log t$$

である。また，$-\dfrac{1}{4\left(t+\frac{1}{2t}-x\right)}$ は x について単調減少なので，以下の増減表が得られる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{2t}$	$\cdots$	$t+\frac{1}{2t}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{8t^2}+\frac{1}{4}\log t$	$\searrow$	

したがって，$\boldsymbol{g(t) = \dfrac{1}{2t}}$，$\boldsymbol{h(t) = \dfrac{1}{8t^2} + \dfrac{1}{4}\log t}$

(2) (1) より，曲線の長さは，

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{\left(\frac{dg}{dt}\right)^2+\left(\frac{dh}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{\left(-\frac{1}{2t^2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4t^3}+\frac{1}{4t}\right)^2}\,dt$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{\frac{1}{4t^4}+\frac{1}{16t^6}-\frac{1}{8t^4}+\frac{1}{16t^2}}\,dt$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{\frac{1}{16t^6}+\frac{1}{8t^4}+\frac{1}{16t^2}}\,dt$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4t^3}+\frac{1}{4t}\right)^2}\,dt$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{4t^3}+\frac{1}{4t}\right)dt$$
$$= \left[-\frac{1}{8t^2}+\frac{1}{4}\log t\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$
$$= \left(-\frac{1}{32}+\frac{1}{4}\log 2\right) - \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\log 2\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{15}{32}+\frac{1}{2}\log 2}$$