

[1]

(1) $x-1 < x < x+1$ であるから $x+1$ が最大であり、三角形の成立条件により、

$$x+1 < (x-1) + x \iff x > 2$$

よって、 $2 < x$

(2) 余弦定理より、

$$\cos A = \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2AB \cdot CA} = \frac{x^2 + (x-1)^2 - (x+1)^2}{2x(x-1)} = \frac{x-4}{2(x-1)}$$

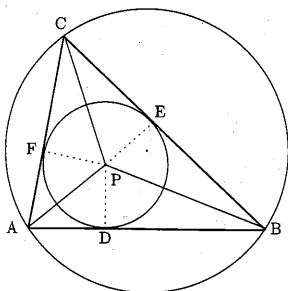
$0^\circ < A < 180^\circ$ より、 $\sin A > 0$ であることに注意し、 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$ を用いると、

$$\sin A = \sqrt{1 - \left\{ \frac{x-4}{2(x-1)} \right\}^2} = \sqrt{\frac{4(x-1)^2 - (x-4)^2}{4(x-1)^2}} = \frac{\sqrt{3(x^2-4)}}{2(x-1)}$$

したがって、外接円 O_1 の半径を R とすると、正弦定理から

$$2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{x+1}{\frac{\sqrt{3(x^2-4)}}{2(x-1)}} = \frac{2(x^2-1)}{\sqrt{3(x^2-4)}}$$

よって、 $R = \frac{x^2-1}{\sqrt{3(x^2-4)}}$



(3) $\triangle ABC$ の面積 S を x を用いて表すと、

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CA \sin A = \frac{1}{2} x \cdot (x-1) \cdot \frac{\sqrt{3(x^2-4)}}{2(x-1)} = \frac{x\sqrt{3(x^2-4)}}{4}$$

一方、内接円の中心を P とし、 $\triangle ABC$ を3つの三角形 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ に分けると、 $\triangle ABC$ の面積 S は内接円の半径 r により、次のように表される。

$$S = \frac{xr}{2} + \frac{(x-1)r}{2} + \frac{(x+1)r}{2} = \frac{3xr}{2}$$

したがって、

$$\frac{3xr}{2} = \frac{x\sqrt{3(x^2-4)}}{4}$$

が成り立ち、これを r について解くと、

$$r = \frac{\sqrt{3(x^2-4)}}{6}$$

(4) $\triangle ABC$ とその内接円 O_2 について、辺 AB , BC , CA との接点をそれぞれ D , E , F とする。
このとき、 $\angle DPF = 180^\circ - \angle A$ より、

$$\sin \angle DPF = \sin(180^\circ - A) = \sin A = \frac{x+1}{2R}$$

同様に、

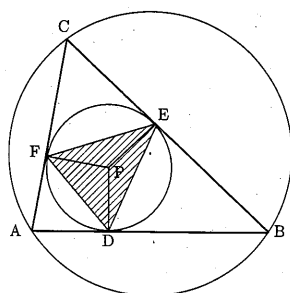
$$\sin \angle DPE = \sin B = \frac{x-1}{2R}, \quad \sin \angle EPF = \sin C = \frac{x}{2R}$$

よって、 $\triangle DEF$ の面積 S_3 は、

$$S_3 = \frac{1}{2}r^2 \sin \angle DPF + \frac{1}{2}r^2 \sin \angle DPE + \frac{1}{2}r^2 \sin \angle EPF = \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{x+1}{2R} + \frac{x-1}{2R} + \frac{x}{2R} \right) = \frac{3xr^2}{4R}$$

よって、(2) より $R = \frac{x^2-1}{\sqrt{3(x^2-4)}}$, (3) より $r^2 = \frac{x^2-4}{12}$ であったから、

$$S_3 = \frac{3x}{4} \cdot \frac{x^2-4}{12} \cdot \frac{\sqrt{3(x^2-4)}}{x^2-1} = \frac{x\sqrt{3(x^2-4)^3}}{16(x^2-1)}$$



[2]

(1) $a_1 = 43$, $a_2 = 43 \times 47 = 2021$, $a_3 = 43 \times 47^2 = 94987$ なので,

$b_2 = 4$, $b_3 = 5$

(2) 定義より $b_n = d(a_n)$, すなわち b_n は a_n の桁数であるから,

$$10^{b_n-1} \leq a_n < 10^{b_n} \iff b_n - 1 \leq \log_{10} a_n < b_n$$

$b_n = n$ と仮定する。 $a = r = 9$ なので, $a_n = 9 \cdot 9^{n-1} = 9^n$ ($n = 1$ のときも $a_1 = 9 = 9^1$ となり成り立つ) であり,

$$10^{n-1} \leq 9^n < 10^n$$

である。第二不等式は, 任意の n に対して成り立つ。第一不等式で常用対数をとると

$$n - 1 \leq n \log_{10} 3^2 = 2n \log_{10} 3$$

となる。 n について整理すると

$$n \leq \frac{1}{1 - 2 \log_{10} 3} = \frac{1}{1 - 2 \times 0.4771} = \frac{1}{1 - 0.9542} = \frac{10000}{458} = 21 \frac{382}{458}$$

を得る。それゆえ $n = 21$

(3) $a = 1$ なので, $a_n = r^{n-1}$ である。

$\{b_n\}$ を等差数列と仮定する。 $b_1 = 1$, $b_2 = d(r)$ なので, 公差は $d(r) - 1$ で, 一般項は $b_n = 1 + (d(r) - 1)(n - 1)$ である。よって,

$$10^{(d(r)-1)(n-1)} \leq r^{n-1} < 10^{1+(d(r)-1)(n-1)}$$

すなわち

$$1 \leq \left(\frac{r}{10^{d(r)-1}} \right)^{n-1} < 10$$

を得る。 $d(r)$ の定義より $10^{d(r)-1} \leq r$ すなわち $1 \leq \frac{r}{10^{d(r)-1}}$ なので, 第一不等式は任意の n に対して成り立つ。

第二不等式が任意の n に対して成り立つような r の条件を求める。 $1 < \frac{r}{10^{d(r)-1}}$ の場合, $t = \frac{r}{10^{d(r)-1}}$ と表したとき, $n \geq \log_t 10 + 1$ となる n に対しては

$$t^{n-1} \geq t^{\log_t 10} = 10$$

となるので, 第二不等式は成り立たない。一方, $1 = \frac{r}{10^{d(r)-1}}$ を満たすような r , すなわち $r = 10^{d(r)-1}$ に対しては, 第二不等式は任意の n に対して成り立つ。

逆に, ある自然数 m に対して $r = 10^m$ ($d(r) = m + 1$) のとき,

$$b_n = d(a_n) = d(10^{m(n-1)}) = m(n-1) + 1$$

であるから, $\{b_n\}$ は公差 m の等差数列である。

以上から, $\{b_n\}$ が等差数列となるための必要十分条件は, 公比 r が $r = 10^{d(r)-1}$ を満たすことである。 $1 < r < 500$ という条件より, $r = 10, 100$

[3]

さいころを4個投げたときの目の出方は 6^4 通りあり、これらは同様に確からしい。

(1) 1の目または6の目が少なくとも1つ出るという事象は、4つとも2, 3, 4, 5のいずれかの目が出るという事象の余事象である。よって、

$$1 - \left(\frac{4}{6}\right)^4 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$$

(2) さいころを4個投げたとき6の目が1つも出ない目の出方は 5^4 通りあり、その内1の目も6の目も1つも出ない目の出方は 4^4 通りあるから

$$\frac{5^4 - 4^4}{6^4} = \frac{625 - 256}{1296} = \frac{369}{1296} = \frac{41}{144}$$

(3) (1)の事象を A , (2)の事象を B , 「6の目が少なくとも1つは出るが、1の目は1つも出ない」という事象を C , 「1と6の両方の目が少なくとも1つ出る」という事象を D とすると、 B , C , D は互いに排反な事象で、 A はこれら3つの事象の和事象であるから、求める確率 $P(D)$ は $P(A) - (P(B) + P(C))$ となる。 $P(C)$ は、(2)と同様にして求めることができ、 $P(C) = P(B) = \frac{41}{144}$ (1)より、 $P(A) = \frac{65}{81}$ であるから、求める確率は、

$$P(D) = P(A) - (P(B) + P(C)) = \frac{65}{81} - 2 \times \frac{41}{144} = \frac{65}{81} - \frac{41}{72} = \frac{520 - 369}{648} = \frac{151}{648}$$

[4]

(1) C と ℓ との交点の x 座標は

$$x(x^2 - 4x + 4) = ax$$

すなわち

$$x\{x^2 - 4x + (4 - a)\} = 0$$

の実数解である。1つは $x = 0$ であり、 C と ℓ は異なる3点で交わることから $x^2 - 4x + (4 - a) = 0$

の判別式を D とすると $\frac{D}{4} = 4 - (4 - a) = a > 0$

そして、2つの解は $x = 2 \pm \sqrt{a}$ であり、いずれも正であるから $0 < 2 - \sqrt{a}$ すなわち $\sqrt{a} < 2$ よって、 $0 < a < 4$

(2) (1) で求めた交点の x 座標のうち、0以外の2つについて、 $\alpha = 2 - \sqrt{a}$ 、 $\beta = 2 + \sqrt{a}$ とおく。
 $0 < \alpha < \beta$ であるから

$$f(x) = x(x - 2)^2 - ax = x(x - \alpha)(x - \beta)$$

と表すと、 $0 \leq x \leq \alpha$ の範囲で $f(x) \geq 0$ 、 $\alpha \leq x \leq \beta$ の範囲で $f(x) \leq 0$ である。 C と ℓ とで囲まれる2つの図形の面積を S 、 T で表し、

$$S = \int_0^\alpha \{x^3 - 4x^2 + (4 - a)x\} dx, \quad T = \int_\alpha^\beta \{-x^3 + 4x^2 - (4 - a)x\} dx$$

を考える。

$$S = \int_0^\alpha \{x^3 - 4x^2 + (4 - a)x\} dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4 - a}{2}x^2 \right]_0^\alpha = \frac{1}{4}\alpha^4 - \frac{4}{3}\alpha^3 + \frac{4 - a}{2}\alpha^2$$

$$\begin{aligned} T &= \int_\alpha^\beta \{-x^3 + 4x^2 - (4 - a)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{4 - a}{2}x^2 \right]_\alpha^\beta \\ &= \left(-\frac{1}{4}\beta^4 + \frac{4}{3}\beta^3 - \frac{4 - a}{2}\beta^2 \right) - \left(-\frac{1}{4}\alpha^4 + \frac{4}{3}\alpha^3 - \frac{4 - a}{2}\alpha^2 \right) \\ &= \left(-\frac{1}{4}\beta^4 + \frac{4}{3}\beta^3 - \frac{4 - a}{2}\beta^2 \right) + S \end{aligned}$$

なので、 $S = T$ のとき

$$\frac{1}{4}\beta^4 - \frac{4}{3}\beta^3 + \frac{4 - a}{2}\beta^2 = \frac{\beta^2}{12} \{3\beta^2 - 16\beta + 6(4 - a)\} = 0$$

すなわち

$$3\beta^2 - 16\beta + 6(4 - a) = 0$$

を解けばよい。 $\beta = 2 + \sqrt{a}$ なので

$$\begin{aligned} 3\beta^2 - 16\beta + 6(4 - a) &= 3(4 + 4\sqrt{a} + a) - 32 - 16\sqrt{a} + 24 - 6a \\ &= -(3a + 4\sqrt{a} - 4) \\ &= -(3\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\sqrt{a} \geq 0$ より、適するの $\sqrt{a} = \frac{2}{3}$ であり、(1) で求めた範囲の条件も満たす。

よって、 $a = \frac{4}{9}$