数学（後期）　解答例

[1]

(1) $2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0}$ より, $-4\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と書き直せる。両辺のベクトルの長さは,

$$|-4\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$$

となる。上式の両辺を二乗して,

$$16|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+9|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+12\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

問題の条件より $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ となるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{16-(9+4)}{12}=\frac{1}{4}$$

(2) 前問より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{4}$ であり，また問題の条件から $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\times\cos\angle\mathrm{AOB}=\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{1}{4}$$

$0^\circ<\angle\mathrm{AOB}<\pi$ より, $\sin\angle\mathrm{AOB}>0$ なので,

$$\sin\angle\mathrm{AOB}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

(3) 問題の条件より $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{1}{4}\times(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ である。D は直線 OC 上の点であるから, ある実数 p を用いて以下のように書ける。

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=p\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{p}{4}(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}})=-\frac{p}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{3p}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

また D は直線 AB 上の点でもあるから, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ はある実数 q を用いて以下のようにも表される。

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=(1-q)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

上の 2 式における $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数を比較すると,

$$-\frac{p}{2}=1-q,\ -\frac{3p}{4}=q$$

が得られ, $p=-\frac{4}{5},\ q=\frac{3}{5}$ と求まる。また,

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と書けることから,$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|:|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=4:5$ と求まる。

(4) 前問で得た式 $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と逆向きのベクトルである。このことから，O は CD を $5:4$ に内分する点と分かる。

したがって，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S' とすると，$S = \frac{9}{4}S'$ となる。まず S' を求めると，

$$S' = \frac{1}{2} \times |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \times \sin\angle\mathrm{AOB} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

したがって $S = \frac{9}{4} \times \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{9\sqrt{15}}{32}$ と求まる。

[2]

(1) $2^x > 0,\ 2^{-x} > 0$ であるから, 相加相乗平均より,

$$2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

等号成立条件は, $2^x = 2^{-x}$, 即ち, $2^{2x} = 1$ より, $x = 0$

以上から, $t \geqq 2$

(2) $t^3 = 8^x + 8^{-x} + 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-x}(2^x + 2^{-x}) = 8^x + 8^{-x} + 3t,\ t^2 = 4^x + 4^{-x} + 2$ であるから,

$$\begin{aligned} 8^x + 8^{-x} &= t^3 - 3t \\ 4^x + 4^{-x} &= t^2 - 2 \quad \cdots\cdots (*) \end{aligned}$$

$(*)$ と $t = 2^x + 2^{-x}$ を $f(x)$ に代入して,

$$\begin{aligned} g(t) &= t^3 - 3t - (2k+1)(t^2 - 2) + (k^2 + 3k - 5)t - k^2 - 5k + 6 \\ &= t^3 - (2k+1)t^2 + (k^2 + 3k - 8)t - k^2 - k + 8 \end{aligned}$$

(3) $g(t)$ に $t = 1$ を代入すると、

$$g(1) = 1 - (2k+1) + (k^2 + 3k - 8) - k^2 - k + 8 = 0$$

となることから, 因数定理より $(t-1)$ は $g(t)$ の因数であることが分かる。$g(t)$ を $(t-1)$ を使って因数分解すると,

$$\begin{aligned} g(t) &= (t-1)t^2 - (t-1)k(2t-1) + (t-1)(k^2 - 8) \\ &= (t-1)(t^2 - 2kt + k^2 + k - 8) \end{aligned}$$

となる。したがって, $g(t)$ を $(t-1)$ で割った商は $t^2 - 2kt + k^2 + k - 8$ である。

(4) $h(t) = t^2 - 2kt + k^2 + k - 8$ とおくと, (3) より $g(t)$ は

$$g(t) = (t-1)h(t)$$

と書ける。

$t = 1 < 2$ であるから, (1) より, $2^x + 2^x = 1$ は実数解を持たない。従って, 方程式 $h(t) = 0$ が $t \geqq 2$ の範囲で実数解を持つような k の値の範囲を求めればよい。

二次方程式 $h(t) = 0$ の判別式は $\dfrac{D}{4} = k^2 - (k^2 + k - 8) = 8 - k$ であり, $y = h(t)$ の軸の方程式は $t = k$ である。

(i) $k \geqq 2$ のとき

$\dfrac{D}{4} \geqq 0$, 即ち, $k \leqq 8$ が求める条件。従って, $2 \leqq k \leqq 8$

(ii) $k \leqq 2$ のとき

$\dfrac{D}{4} \geqq 0$ かつ $h(2) \leqq 0$, 即ち,

$$k \leqq 8 \quad \text{かつ} \quad h(2) = k^2 - 3k - 4 = (k-4)(k+1) \leqq 0$$

が求める条件。従って, $-1 \leqq k \leqq 2$

(i) または (ii) が成り立てばよいから, 求める k の値の範囲は, $-1 \leqq k \leqq 8$

[3]

(1) 放物線 C_1, C_2 の式の右辺同士が等しくなるような x を求める。

$$x^2 = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a$$

$a > 0$ よりこれを解いて, 共有点の x 座標は $x = a - 1$ と得られる。

(2) 放物線 C_1 上の点 (p, p^2) における C_1 の接線は, 傾きが $2p$ で (p, p^2) を通るので $y = 2px - p^2$ で表される。この接線が C_2 とも接するならば, 接線の式と $C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a$ を連立させて得られる方程式が重解をもつ。

$$\begin{aligned} & 2px - p^2 = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - (4a + 2p)x + 4a^2 - 4a + p^2 = 0 \cdots\cdots (a) \end{aligned}$$

方程式 (a) の判別式を考えると

$$\begin{aligned} & (4a + 2p)^2 - 4(4a^2 - 4a + p^2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & a(p + 1) = 0 \end{aligned}$$

$a > 0$ より, $p = -1$ が得られる。したがって, 接線 ℓ の式は以下となる。

$$y = -2x - 1$$

(3) まず C_2 と ℓ の接点の x 座標 q を求める。C_2 と ℓ の接点における C_2 の接線の傾きは $2q - 4a$ である。 小問 (2) から接線 ℓ の傾きは -2 なので, $2q - 4a = -2$ より $q = 2a - 1$ である。

(2) より, C_1 と ℓ の接点の x 座標は -1 である。また (1) より, C_1 と C_2 の交点の x 座標は $a - 1$ である。

ℓ と C_1 の位置関係について,

$$x^2 - (-2x - 1) = (x + 1)^2 \geqq 0$$

より, どのような区間でも $x^2 \geqq -2x - 1$ である。同様に ℓ と C_2 の位置関係は,

$$x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a - (-2x - 1) = \{x - (2a - 1)\}^2 \geqq 0$$

より, どのような区間でも $x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a \geqq -2x - 1$ である。

したがって, 求める面積は以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{a-1} \{x^2 - (-2x - 1)\}dx + \int_{a-1}^{2a-1} \{(x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a) - (-2x - 1)\}dx \\ & = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_{-1}^{a-1} + \left[\frac{1}{3}x^3 - (2a - 1)x^2 + (2a - 1)^2 x\right]_{a-1}^{2a-1} \\ & = \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3 \end{aligned}$$

[4]

(1) 赤をR, 青をB, 緑をG, 黄をY, 紫をPで表す。また, 左からk番目$(k=1,2,...,5)$の長方形に塗る色を$a_k \in \{\mathrm{R},\mathrm{B},\mathrm{G},\mathrm{Y},\mathrm{P}\}$とする塗り方を$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$と表す。

まず, 赤, 青の2色で塗る塗り方を考える。この2色を使った塗り方は,

$$(\mathrm{R},\ \mathrm{B},\ \mathrm{R},\ \mathrm{B},\ \mathrm{R}),\ (\mathrm{B},\ \mathrm{R},\ \mathrm{B},\ \mathrm{R},\ \mathrm{B})$$

の2通りである。

5色から2色を選ぶ組み合わせは,

$${}_5\mathrm{C}_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10(\text{通り})$$

あるので, 2色で塗る塗り方は,

$$2 \times 10 = 20(\text{通り})$$

ある。

(2) 5色で塗る場合, 板の回転を許さないと,

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120(\text{通り})$$

の塗り方がある。

(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)で塗られた板を回転させると(a_5,a_4,a_3,a_2,a_1)と一致する。左右対称ではない塗り方, すなわち, $a_1 \neq a_5$, または, $a_2 \neq a_4$のとき, 板の回転を許さないときには(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)と(a_5,a_4,a_3,a_2,a_1)は異なる塗り方になるが, 題意よりこれら2つの塗り方は同じである。

ここで, 5色すべて用いて塗る塗り方は左右対称な塗り方ではないことに注意すると, 5色すべて用いて塗る場合の塗り方は,

$$120 \div 2 = 60(\text{通り})$$

ある。

(3) まず, 塗り方の総数を求める。そのために, 左右対称な塗り方と, 左右対称ではない塗り方の総数をそれぞれ求める。

左右対称な塗り方では, $a_1 = a_5$かつ$a_2 = a_4$となる。したがって, 左右対称な塗り方はa_1, a_2, a_3を決めれば1つに定まる。したがって, 隣り合う長方形を異なる色で塗る点に注意すると, 左右対称な塗り方は,

$$5 \times 4 \times 4 = 80(\text{通り}) \cdots\cdots (a)$$

次に, 左右対称ではない塗り方の総数を求める。板の回転を許さない場合, 隣同士の長方形を同一色で塗らないような色の塗り方は,

$$5 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1280(\text{通り})$$

これと (a) から, 板の回転を許さない場合, 左右対称ではない塗り方は,

$$1280 - 80 = 1200(\text{通り})$$

ある。上述のように, 左右対称ではない塗り方 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ は, 板の回転を許さない場合には異なる塗り方である $(a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$ と同じとみなすので, 左右対称ではない塗り方は,

$$1200 \div 2 = 600(\text{通り}) \cdots\cdots (b)$$

ある。

(a), (b) より, 塗り方の総数は,

$$80 + 600 = 680(\text{通り})$$

ある。小問 (2) より, 5 色すべて用いる場合の塗り方は 60 通りあるので, 4 色以下で塗る場合の塗り方は,

$$680 - 60 = 620(\text{通り})$$

ある。

(4) 当面, 赤 (R), 青 (B), 緑 (G), 黄 (Y) の 4 色で塗るとする。このうちの 1 色によって隣り合わない 2 つの長方形を塗り, 残り 3 つの長方形を異なる 3 色で塗る。

2 つの隣り合わない長方形の選び方は, 5 つの長方形から 2 つの長方形を選ぶ組み合わせの数から, 隣り合う 2 つの長方形を選ぶ選び方の数の差, すなわち, ${}_5\mathrm{C}_2 - 4 = 6$ 通りある。選ばれた 2 つの長方形を塗る色は, R, B, G, Y の 4 通り, 残りの 3 色で残り 3 つの長方形を塗る塗り方は, $3! = 3 \times 2 = 6$ 通りある。したがって, 板の回転を許さない場合, R, B, G, Y の 4 色で塗る塗り方は,

$$6 \times 4 \times 6 = 144(\text{通り})$$

ある。

4 色を用いて塗る塗り方 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ は左右対称な塗り方ではないため, 上述のとおり, 板の回転を許さない場合には異なる塗り方である $(a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$ と同じである。したがって, R, B, G, Y の 4 色で塗る塗り方は,

$$144 \div 2 = 72(\text{通り})$$

ある。

5 色から 4 色を選ぶ選び方は, R, B, G, Y という組み合わせを含めて ${}_5\mathrm{C}_4 = 5$ 通りあるので, 4 色で塗る塗り方の総数は,

$$5 \times 72 = 360(\text{通り})$$

ある。