

理学・工学

key word

■ カンドル

■ 付随群

■ カンドル(コ)ホモロジー

■ 代数的位相幾何学

■ コクセター群



長谷川 蒼

Aoi Hasegawa

データサイエンス・AIイノベーション
研究推進センター助教

【プロフィール】

・2024 年 3 月
北海道大学大学院理学院数
学専攻博士後期課程修了
博士(理学)

・2024 年 4 月～2024 年 9 月
北海道大学 数理・データサイ
エンス教育研究センター 実践
教育プログラム部門 博士研
究員

・2024 年 10 月～
現職

【主な社会的活動】

所属学会
・日本数学会
・土木学会

【連絡先】

aoi-hasegawa@biwako.shiga-
u.ac.jp

【Research Map】

<https://researchmap.jp/a-hasegawa>

【代表的な研究テーマ】

□ カンドルの付随群および2次カンドルホモロジー

課題解決に役立つシーズの説明

カンドル(quandle)は、結び目理論における Reidemeister 移動を背景として 1982 年に D. Joyce と S. V. Matveev によって独立に導入された、対称性の記述に優れた代数系である(なお、Matveev は「distributive groupoid」という名称を用いた)。ただし、カンドルの原型となる概念は Joyce らによる導入以前から研究されていた。例えば、1943 年に Takasaki は対称変換の代数として「kei」を導入した。これはカンドルの特別な場合である。また、1959 年に J. Conway と G. Wraith は、群の積構造を無視し、共役構造のみを考えた代数として「wrack (現在では rack と呼ばれる)」を定義しており、これはカンドルの一般化に当たる概念である。

現在、カンドルは結び目理論の分野で活発に研究されている。特に、結び目不変量の構築や結び目の分類・識別において重要な役割を果たしている。また、Yang-Baxter 方程式の集合論的解や Hopf 代数、対称空間の研究など、さまざまな分野への応用も進展している。私は、代数的な観点からカンドルの構造を解析し、群論が記述する対称性との差異や、群の(コ)ホモロジーをはじめとする他の数学的対象から得られる(コ)ホモロジー群との関連性に興味を持って研究している。

■ カンドルの付随群

任意のカンドルに対して、その付随群が群の表示を用いて定義される。付随群を用いて、元のカンドルと同型になるようなカンドルを構成できることが知られている。このことから、付随群の構造を調べることはカンドルの性質を解明する上で有用である。しかし、付随群はその定義が群の表示に基づいているため、一般にはその構造解析が難しい。そこで私は、対合的カンドル Q の付随群 $As(Q)$ に対して、性質の良い剰余群 $As_f(Q)$ を導入した。この研究の結果として、以下を示した：

1. $As(Q)$ の交換子部分群は、 $As_f(Q)$ の交換子部分群と同型である。

2. 対合的カンドルの付随群は、 $As_f(Q) \rightarrow As_f(Q)_{ab} \leftarrow As(Q)_{ab}$ (ab はアーベル化を表す)による引き戻しで記述される。

■ カンドルホモロジー

カンドルホモロジーは状態和における結び目不変量を定義するために、2003 年に J. S. Carter らによって導入された概念である。Eisermann によって 2 次カンドルホモロジーを計算するための定理が得られている。しかし、この定理を用いて具体的な計算を行うには、連結なカンドルであっても付随群の安定化部分群や交換子部分群の構造を調べる必要があるため、計算は一般に困難である。そこで私は、Eisermann の公式を、対合的カンドルに対してその 2 次カンドルホモロジーの計算をより容易に行える形に改良した。この改良された公式を用いることで、連結な有限 Coxeter カンドルの 2 次カンドルホモロジーを完全に決定することができた。

W の型	$A_n(n \geq 1)$	$D_n(n \geq 4)$	E_6	E_7
$H_2(Q_W)$	$0(n \leq 2)$ $\mathbb{Z}_2(n \geq 3)$	$\mathbb{Z}_2^3(n = 4)$ $\mathbb{Z}_2^2(n \geq 5)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$

W の型	E_8	$I_2(n) (n \geq 3)$	H_4	H_3
$H_2(Q_W)$	$\mathbb{Z}_2$	$0 (n \text{ は奇数})$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$

表 1 Coxeter 群 W の Coxeter カンドル Q_W に対する 2 次カンドルホモロジーの計算結果

企業・自治体へのメッセージ

トポロジーの観点からカンドルを調べることに興味を持っています。